1-1 مقدمه:

علم جامدات به روابط نیروهای خارجی با تنش و کرنش داخلی می‌پردازد. برای بررسی هر جسم جامد، ابتدا باید آن جسم تحت تعادل استاتیکی قرار داشته باشد.

نیروهای خارجی عمل کننده روی یک جسم به «نیروهای سطحی»[1]، و نیروهای حجمی»[2] تقسیم می‌شوند. نیروهای سطحی به صورت نیروهای متمرکز و یا نیروهای گسترده روی سطح جسم وارد می‌آیند. نیروهای حجمی نیروهائی هستند که بر همه ذرات جسم اثر می‌کنند. از جمله نیروهای حجمی می‌توان وزن، نیروی گریز از مرکز و جاذبه‌های مغناطیسی را نام برد.

رفتار جسم، به صورت تغییر ابعاد آن و یا دربرخی موارد شکست آن، تابع توزیع نیروهای داخلی است، که خود بستگی به سیستم نیروهای خارجی دارد. برای بررسی رفتار جسم، نخست باید تنش را شناخت و سپس آن را تحلیل کرد. در این بخش ابتدا تنش تعریف شده و سپس تحلیل آن در سیستم دومحوری و سه‌محوری ارائه می‌شود. اثر نیروهای داخلی در تغییر ابعاد جسم در بخش دوم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

2 - 1 تعریف تنش

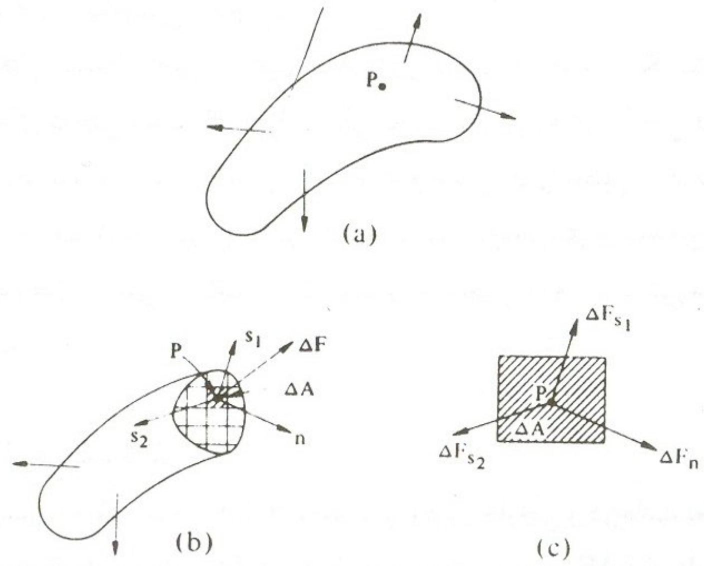
جسمی مطابق شکل (1-1a)، تحت نیروهای خارجی و درحالت تعادل در نظر گرفته می‌شود. المان سطحی ΔA در داخل جسم تحت نیروی ΔF قرار دارد، شکل (1-1b) محورهای متعامد n، s_1، s_2، که مبداء آن نقطه P است طوری درنظر گرفته می‌شوند که n نرمال و s_1 و s_2 مماس بر سطح ΔA باشند. درحالت کلی ΔF روی هیچیک از

- surface forces   2- body forces

محورهای n ، s_1 ، s_2 قرار نگرفته است. تجزیه نیروی ΔF به مؤلفه‌هائی موازی n ، s_1 و s_2 ، شکل (1-1c) ، منتهی به تعریف تنش نرمال σ_n و تنش‌های برشی τ_s به صورت زیر می‌شود؛

$$\sigma_n = \underset{\Delta A \to 0}{\text{Limit}} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \tag{1-1}$$

$$\tau_{s1} = \underset{\Delta A \to 0}{\text{Limit}} \frac{\Delta F_{s1}}{\Delta A} \qquad \tau_{s2} = \underset{\Delta A \to 0}{\text{Limit}} \frac{\Delta F_{s2}}{\Delta A}$$



شکل (1-1)

رابطهٔ (1-1) مؤلفه‌های تنش در نقطه P ، وقتی سطحی ΔA خیلی کوچک می‌شود، را نشان می‌دهد. واحد تنش در سیستم SI برحسب نیوتن برمتر مربع یا پاسکال (Pa) است. درجدول (1-1) برخی واحدهای این سیستم با سیستم انگلیسی مقایسه شده است.

اجزاء مورد استفاده در سیتم SI عبارتند از؛

μ (میکرو)، m (میلی)، c (سانتی)، d (دسی)، k (کیلو)، M (مگا)، و G (گیگا) که ضرایب آن به ترتیب 10^{-6} ، 10^{-3} ، 10^{-2} ، 10^{-1} ، 10^{3} ، 10^{6} ، 10^{9} است.

Quantity	SI Units	U.S.Units
Length	meter (m)	inch
Force	newton (N)	pound force
Time	second (s)	second
Mass	kilogram (kg)	pound mass, slug

Some conversion factors

1 m = 39.37 in	1 N = 0.2248 lbf
1 MPa = 145 psi	1 kg = 2.2046 lbm
1 kN/m = 68.53 lb/ft	1 N.m = 0.7376 lbf.ft

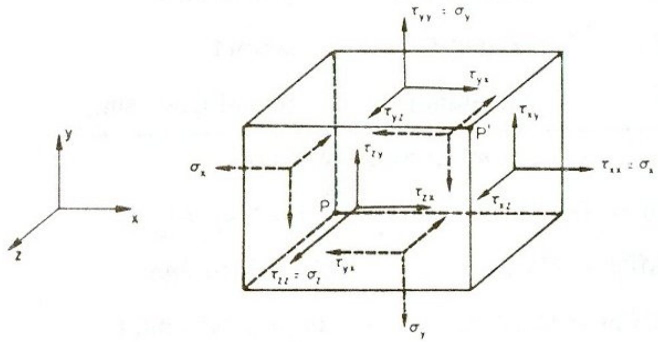
مقادیر بدست آمده از رابطهٔ (1-1) با تغییر نیروی ΔF ، تغییر می‌کند. مؤلفه‌های تنش نه تنها به نیروی ΔF ، بلکه به جهت سطحی که از نقطه P می‌گذرد، نیز بستگی دارند.

بنابراین تنش‌ها در یک نقطه خاص باتوجه به سطح انتخاب شده تغییر می‌کنند، و برای شناخت تنش در یک نقطه باید وضعیت تنش روی تمام صفحات عبور کرده از آن نقطه را شناخت.

در ساده‌ترین حالت، وقتی یک میله منشوری، تحت نیروی گسترده F در دو انتها قرار دارد، نیروهای داخلی هم به صورت یکنواخت روی هر مقطع توزیع شده‌اند. منظور از میله منشوری، میله‌ای است که سطح مقطع آن، A ، در تمام طول یکسان است. درنتیجه ... F/A خواهد بود.

1-3 تانسور تنش

در قسمت 1-8 نشان داده خواهد شد که برای مشخص شدن تنش در یک نقطه، و یا به عبارت دیگر تنش روی سطوح بسیار زیادی که از آن نقطه می‌گذرند، کافیست تنش روی سه سطح متعامد مشخص باشد. این سه سطح طبق شکل (2-1)، بر سه محور مختصات عمود بوده و سه رویه یک مکعب مستطیل را تشکیل می‌دهند. حالت تنش در این شکل سه محوری است، و فرض شده است که تنش در نقاط P و P′ یکسان بوده و توزیع تنش یکنواخت است.



شکل (2-1)

روی هر رویه تنش را می‌توان با یک بردار که از مرکز سطح می‌گذرد نشان داد. در ضمن همانطور که درقسمت قبل گفته شد، نه مؤلفه اسکالر تنش حالت تنش در نقطه را نشان می‌دهد. مؤلفه‌های تنش را می‌توان به شکل ماتریس زیر نوشت، که در آن هر ردیف نشاندهنده تنش‌های روی یک صفحه عبور کرده از نقطه P (x,y,z) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \qquad (1-2)$$

آرایه فوق یک تانسور رتبه دواست (به قسمت 1-8 رجوع شود)، و برای نشان دادن هر المان یا مؤلفه آن دو اندیس لازم است. بردار یک تانسور رتبه یک، و اسکالر تانسور رتبه صفر می‌باشد.

نمادگذاری دو اندیس هر مؤلفه تنش بدین صورت است: اندیس اول نشان دهنده جهت نرمال بر صفحه یا رویه‌ای است که مؤلفه تنش روی آن عمل می‌کند، و اندیس دوم جهت خود تنش را نشان می‌دهد. در این کتاب تنش‌های نرمال τ_{xx} و τ_{yy} و τ_{zz} با σ_x، σ_y، σ_z نشان داده خواهد شد. در ضمن هر صفحه و یا رویه نیز با محور عمود بر آن، مثلاً صفحه عمود بر محور x صفحه x، خوانده می‌شود.

با مراجعه به شکل (2-1)، مشخص می‌شود که هر دو مؤلفه تنش نشانداده شده با τ_{yx} المان را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانند. براین مبنا روش علامت گذاری زیر طوری انتخاب شده است که این دو مؤلفه هم علامت باشند. در این علامت‌گذاری از جهت نرمال (بطرف خارج) صفحه و جهت خود مؤلفه استفاده شده است، و برای هر دو مؤلفه تنش نرمال و تنش برشی قابل استفاده است. وقتی جهت نرمال بر صفحه و جهت تنش، نسبت به محورهای مختصات، مثبت باشند مؤلفه تنش مثبت است. همچنین وقتی هر دو جهت منفی است، مؤلفه تنش مثبت خواهد بود. درحالت دیگر اگر یکی از این دو مثبت و یکی منفی باشد، مؤلفه تنش منفی در نظر گرفته می‌شود. با این علامت‌گذاری تنش‌های نرمال کششی مثبت، و تنش‌های نرمال فشاری منفی خواهند بود. در ضمن همه مؤلفه‌های تنش نشان داده شده در شکل (2-1)، مثبت می‌باشند.

سیستم نمادگذاری تانسوری یا اندیسی، که در آن مؤلفه‌های تنش به صورت τ_{ij} نشان داده می‌شوند، در پیوست الف آمده است، و در ادامه بحث در این کتاب مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

1-4 تغییرات تنش در داخل یک جسم

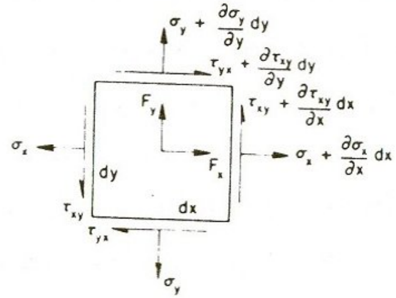
مؤلفه‌های تنش ممکن است از نقطه‌ای به نقطه دیگر متغیر باشند. المان نازک با ابعاد

dx و dy در نظر گرفته شده، فرض می‌شود روی المان تنش‌های σ_x، σ_y، τ_{xy} و τ_{yx} عمل می‌کنند. این مؤلفه‌ها به صورت فقط تابعی از x و y فرض شده، و سایر مؤلفه‌های تنش صفر فرض می‌شوند. علاوه بر این مؤلفه‌های نیروهای حجمی در جهت‌های x و y به ترتیب F_x و F_y بوده، و این مؤلفه‌ها مستقل از جهت z هستند. در ضمن $F_z=0$ می‌باشد. این حالت تنش، «تنش صفحه‌ای»، نامیده می‌شود. باید توجه داشت که با فرض کوچک بودن المان، تنش‌ها با توزیع یکنواخت روی هر رویه می‌توانند در نظر گرفته شوند.

باحرکت کردن از نقطه‌ای به نقطه دیگر، مثلاً ازنقطه گوشه چپ و پائین به نقطه گوشه راست و بالا، هر مؤلفه تنش مثلاً σ_x، ابتدا روی صفحه x منفی اثر کرده، وسپس به مؤلفه روی صفحه x مثبت تغییر می‌کند. سایر مؤلفه‌های تنش σ_y، τ_{xy} و τ_{yx} نیز تغییرات مشابهی دارند. تغییرات تنش در اثر جابجائی را می‌توان به کمک بسط کوتاه شده تیلور به صورت زیر نشان داد؛

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma x}{\partial x} dx \qquad \text{(a)}$$

در این رابطه باتوجه به اینکه σx تابعی از x و y است، مشتق نسبی بکار رفته است. با همین روش می‌توان سایر مؤلفه‌های تنش را، طبق شکل (1-3)، نشان داد.



شکل (1-3)

این المان باید تعادل استاتیکی داشته باشد. با فرض ضخامت واحد برای المان، تعادل ممان حول گوشه چپ و پائین به صورت زیر خواهد بود؛

$$\left(\frac{\partial \sigma y}{\partial y} dxdy \right) \frac{dx}{2} - \left(\frac{\partial \sigma x}{\partial x} dxdy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dxdy$$

$$- \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdy + F_y dxdy \frac{dx}{2} - F_x dxdy \frac{dy}{2} = 0$$

با صرفنظر کردن از ترمهائی که در آن dx و dy سه مرتبه درهم ضرب شده‌اند، عبارت فوق به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \text{(1-3)}$$

با روش مشابه می‌توان تساویهای زیر را نشان داد؛

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{و} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \text{(1-3b)}$$

در نتیجه اندیسهای مؤلفه تنش برشی قابل جابجائی است، و به عبارت دیگر تانسور تنش متقارن است. این تقارن بدین مفهوم است که تنش‌های برشی عمل کننده روی صفحات عمود برهم برابر می‌باشند. بدین علت در ادامه بحث بین τ_{xy}، τ_{yx}، τ_{xz}، τ_{zx}، τ_{yz} و τ_{zy} تمایزی در نظر گرفته نخواهد شد.

از تعادل المان درجهت x نتیجه می‌شود؛

$$\left(\sigma x + \frac{\partial \sigma x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau xy}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx + F_x dxdy = 0 \qquad \text{(b)}$$

پس از ساده کردن رابطهٔ (b) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\left(\frac{\partial \sigma x}{\partial x} + \frac{\partial \tau xy}{\partial y} + F_x \right) dxdy = 0 \qquad \text{(c)}$$

از آنجاکه dxdy نمی‌تواند صفر باشد، مقدار داخل پرانتز باید صفر شود. به روش مشابه می‌توان تعادل استاتیک درجهت y را نوشت. از مجموع این دو، «معادله دیفرانسیل تعادل» زیر به دست می‌آید؛

$$\frac{\partial \sigma x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\text{(1-4)}$$

$$\frac{\partial \sigma y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

با عمومیت دادن رابطهٔ فوق، معادله دیفرانسیل تعادل برای حالت سه محوری به شکل زیر درمی‌آید؛

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0$$

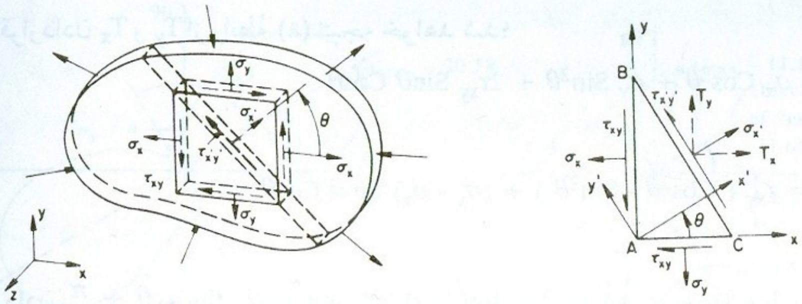
در بسیاری از مسائل علمی، فقط وزن جسم به صورت نیروی حجمی عمل می‌کند. در این صورت، با انتخاب محور y به طرف بالا و نشان دادن جرم حجمی با ρ و شتاب ثقل زمین با g، در روابط (1-4) و (1-5) مؤلفه‌های نیروهای حجمی به صورت زیر خواهند بود؛

$$F_x = F_z = 0 \quad \text{و} \quad F_y = -\rho g \qquad (d)$$

1-5 تنش دومحوری در یک نقطه

وقتی در یک نقطه تنش دومحوری حکمفرما است که تنش‌ها و نیروهای حجمی مستقل از یکی از محورهای مختصات، مثلاً z، باشند. در چنین حالتی تنش‌های σ_x، σ_y و τ_{xy} و مؤلفه‌های x و y نیروهای حجمی وجود خواهند داشت. مسائل دومحوری به دو صورت «تنش صفحه‌ای» یا «کرنش صفحه‌ای» تعریف می‌شوند. درحالت تنش صفحه‌ای، مثل حالتی که در قسمت قبل بررسی شد، تنش‌های σ_z، τ_{xz}، τ_{yz} و مؤلفه نیروی حجمی در جهت z صفر فرض می‌شوند. درحالت کرنش صفحه‌ای، τ_{xz}، τ_{yz} و مؤلفه نیروی حجمی F_z صفر می‌باشند ولی σ_z صفر نبوده، و آن را می‌توان از دو مؤلفه تنش σ_x و σ_y به دست آورد.

حال روابط انتقال مؤلفه‌های تنش σ_x، σ_y و τ_{xy} برای نقطه‌ای از جسم که با المان کوچک شکل (1-4a) نشان داده شده است مورد بررسی قرار می‌گیرد. مؤلفه σ_z، حتی اگر صفر نباشد، در این بررسی اثری نخواهد داشت.



(a) (b)

شکل (1-4)

گوشهٔ بریده شده این المان در شکل (1-4b) نشان داده شده است. هدف از این بررسی، بدست آوردن تنش‌های $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$، مربوط به محورهای x' و y' است که طبق شکل با محورهای x و y زاویه θ تشکیل می‌دهند. ضلع BC عمود بر x' در نظر گرفته می‌شود. توجه داشته باشید که باتوجه به قرارداد علائم، $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ در شکل (1-4b) مثبت هستند. اگر سطح BC واحد فرض شود، سطوح AB و AC به ترتیب برابر $\cos\theta$ و $\sin\theta$ خواهند بود.

ازتعادل نیروها در جهت‌های x و y نتیجه می‌شود؛

$$T_x = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$$
$$T_y = \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \qquad (1\text{-}6)$$

که در آن T_x و T_y مؤلفه‌های منتجه تنش روی BC در جهت‌های x و y است. تنش‌های برشی و نرمال روی سطح x' (سطح BC) با تصویرکردن T_x و T_y در جهت‌های x' و y' به دست می‌آیند؛

$$\sigma_{x'} = T_x \cos\theta + T_y \sin\theta$$
$$\tau_{x'y'} = T_y \cos\theta - T_x \sin\theta \qquad (a)$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_{x'}^2 + \tau_{x'y'}^2 = T_x^2 + T_y^2$$

با قراردادن T_x و T_y از رابطهٔ (a) نتیجه خواهد شد؛

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

(b)

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta$$

با قراردادن $\frac{\pi}{2} + \theta$ به جای θ در عبارت $\sigma_{x'}$، $\sigma_{y'}$ بدست می‌آید. با استفاده از روابط مثلثاتی زیر:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\Theta)$$

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

«روابط انتقال تنش» به صورت زیر درمی‌آیند؛

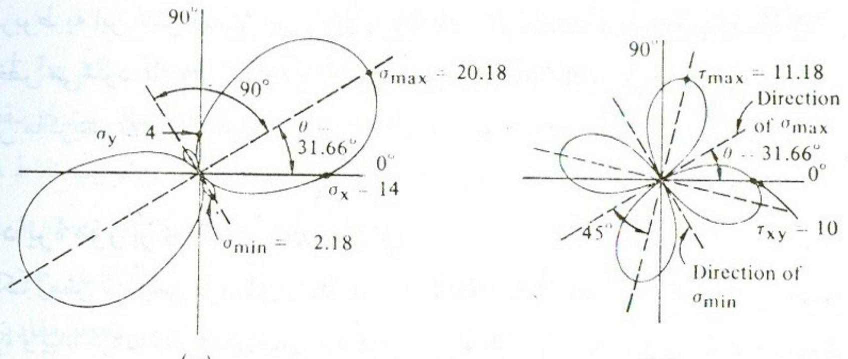
$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (1\text{-}7a)$$

$$\tau_{x'y'} = - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (1\text{-}7b)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (1\text{-}7c)$$

با استفاده از روابط فوق، با دانستن مؤلفه‌های تنش روی سه رویه متعامد، می‌توان تنش‌های روی هر صفحه دلخواه BC (حالت تنش در یک نقطه) را به دست آورد.

برای مثال حالت تنش $\sigma_x = 14$ MPa، $\sigma_y = 4$ MPa و $\tau_{xy} = 10$ MPa در نظر گرفته می‌شود. با قراردادن این مقادیر در روابط (1-7) و تغییر زاویه θ بین $0°$ تا $360°$ منحنی‌های شکل (1-5) بدست می‌آیند. این منحنی‌ها «مسیرهای تنش» نامیده می‌شوند و $\sigma_{x'}$ در مقابل θ (شکل 1-5a)، و $\tau_{x'y'}$ درمقابل θ (شکل 1-5b) را نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که تنش‌های نرمال روی صفحات $\theta = 31.66°$ و $\theta = 31.66° + 90°$ ماکزیمم یا می‌نیمم بوده و روی این صفحات تنش برشی صفراست. این نتیجه همانطورکه در قسمت بعد نشان داده می‌شود برای هر حالت تنش دو محوری (یا سه محوری) صادق است.



شکل (1-5)

1-6 تنش‌های اصلی در حالت دومحوری

برای تعیین جهت $x'y'$ به طوری که در آن $\sigma_{x'}$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، کافیست با استفاده از رابطهٔ (1-7a)، $\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$ قرار داده شود. در این صورت نتیجه می‌شود؛

$$- (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \qquad (a)$$

یا:

$$\mathrm{tg}\, 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (1\text{-}8)$$

باتوجه به اینکه $\mathrm{tg}\, 2\theta = \mathrm{tg}\, (\pi + 2\theta)$ است، رابطهٔ (1-8) دوجهت عمود برهم را مشخص می‌کند. این دو جهت، «جهت‌های اصلی»، نامیده می‌شوند، و در امتداد آنها تنش‌های اصلی، ماکزیمم یا می‌نیمم، عمل می‌نماید.

با مقایسه رابطهٔ (a)، نتیجه می‌شود که روی سطوح اصلی $\tau_{x'y'} = 0$ است. به عبارت دیگر سطوح اصلی بدون تنش برشی هستند. تنش‌های اصلی، با قراردادن رابطهٔ (1-8) در رابطهٔ (1-7a) به صورت زیر بدست می‌آیند؛

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2_{xy}} \qquad (1\text{-}9)$$

در این رابطهٔ تنش اصلی ماکزیمم با σ_1 و تنش اصلی می‌نیمم با σ_2 نشان داده شده است. برای اینکه زاویه صفحه تنش اصلی σ_1 پیدا شود، باید مشخص کرد که کدام مقدار θ_p مربوط به این تنش است. این زاویه با قراردادن دو مقدار σ_1 و σ_2 در رابطهٔ (1-7a) مشخص می‌شود. با روش مشابه و با استفاده از رابطهٔ (1-7b) می‌توان عبارتی برای تنش برشی ماکزیمم به دست آورد.

1-7 دایرهٔ مور برای تنش دومحوری

یک روش ترسیمی برمبنای رابطهٔ (1-7)، امکان انتقال تنش از صفحه‌ای به صفحه دیگر، و پیدا کردن تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم را بدست می‌دهد. این روش ترسیمی به نام دایرهٔ مور نامیده می‌شود.

برای بدست آوردن معادله دایره، روابط (1-7a) و (1-7b) به صورت زیر نوشته می‌شوند؛

$$(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (a)$$

که در آن $\sigma = \sigma_{x'}$ و $\tau = \tau_{x'y'}$ است. رابطهٔ (a) روی محورهای قائم $\sigma - \tau$ یک دایره است و به نام دایرهٔ مور نامیده می‌شود.

در دایرهٔ مور علامت قراردادی برای تنش‌های نرمال همان علامت قراردادی قبل است، ولی برای سهولت در ترسیم و استفاده از این دایره علامت قراردادی زیر برای تنش برشی به کار می‌رود:

اگر تنش‌های برشی روی رویه‌های مقابل نیروئی ایجاد کنند که کوپل آن در جهت عقربه‌های ساعت باشد، این تنش‌ها مثبت فرض می‌شوند. با این تعریف تنش‌های برشی روی رویه‌های y از شکل (1-4a) مثبت، و تنش‌های برشی روی رویه‌های x منفی خواهند بود. با استفاده از علامت قراردادی جدید، برای رسم دایرهٔ مور (شکل 1-6) به ترتیب ذیل عمل می‌شود؛

۱ـ محورهای قائم $\sigma - \tau$ انتخاب شده و مقیاس یکسانی روی این دو انتخاب می‌شود.

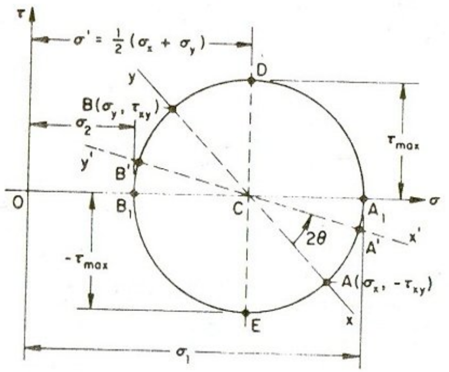
۲ـ مرکز دایره در فاصله $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ از مبدأ مختصات مشخص می‌گردد.

۳ـ نقطهٔ A با مؤلفه‌های σ_x و $-\tau_{xy}$، مشخص‌کننده تنش روی رویهٔ x مثبت، انتخاب می‌شود.

۴ـ دایره‌ای به مرکز C و شعاع CA رسم می‌گردد.

پس از رسم دایره، امتداد AC، دایره را در نقطه B به مشخصات σ_y و $+\tau_{xy}$ قطع می‌نماید. برای تعیین مؤلفه‌های تنش روی صفحه‌ای با زاویه θ، کافیست از نقطه A (مبدأ) به اندازهٔ 2θ در همان جهت زاویه θ (شکل 1-4) چرخید. بدین ترتیب نقاط A و B تنش‌های صفحات x و y، و نقاط A' و B' تنش‌های صفحات x' و y' را به دست می‌دهند. واضح است که نقاط A_1 و B_1 روی دایره مشخص‌کننده مقادیر تنش‌های اصلی طبق روابط (1-8) و (1-9) بوده، و نقاط D و E ماکزیمم تنش‌های برشی را نشان می‌دهند. مقادیر تنش برشی ماکزیمم (بدون توجه به علامت) با τ_{max} نشان داده شده و برابر است با:

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau^2 xy} \qquad (1\text{-}10)$$



شکل (1-6)

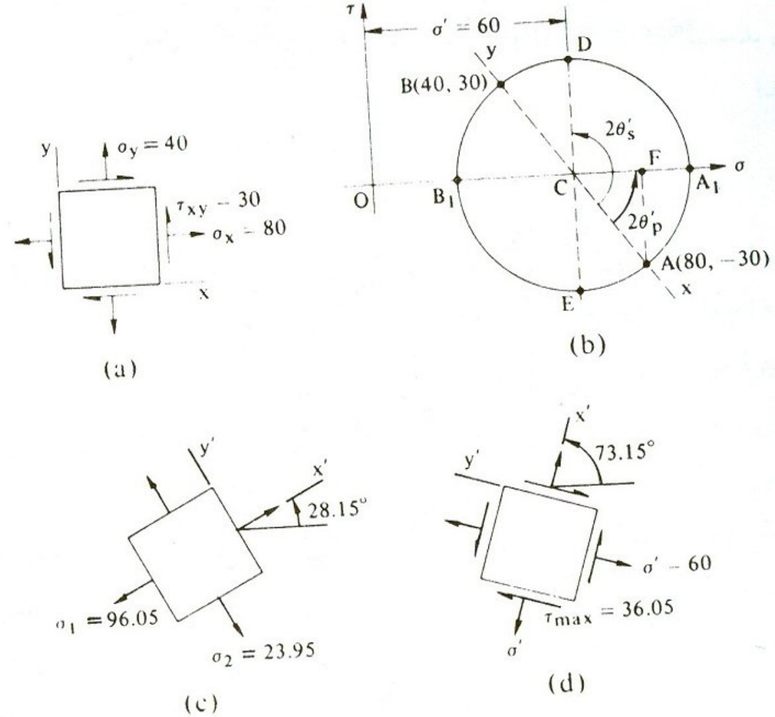
از دایرهٔ مور نیز پیداست که زاویه صفحات اصلی و صفحات تنش برشی ماکزیمم °45 است. تنش نرمال روی صفحات تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

$$\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (1\text{-}11)$$

کاربرد دایرهٔ مور در مثال‌های زیر نشان داده شده است.

مثال 1-1

در نقطه‌ای از یک جسم، تنش‌ها برحسب مگا پاسکال مطابق شکل (1-7a) است. با استفاده از دایرهٔ مور، (a) مقادیر و جهات تنش‌های اصلی، و (b) مقدار و جهت تنش برشی ماکزیمم را به دست آورید. درهر حالت نتایج را روی یک المان نشان داده و تانسور تنش را به شکل ماتریس نشان دهید.



شکل (1-7)

حل: دایرهٔ مور برای المان در شکل (1-7b) رسم شده است و مرکز آن در روی محور σ در

$(40 + 80)/2 = 60$ MPa

قرار دارد.

(a) تنش‌های اصلی با نقاط A_1 و B_1 نشان داده شده‌اند. در نتیجه تنش‌های اصلی ماکزیمم و می‌نیمم با استفاده از دایره برابرند با:

$$\sigma_{1,2} = 60 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\ (80-40)^2 + (30)^2}$$

یا

$\sigma_1 = 96.05$ MPa و $\sigma_2 = 23.95$ MPa

زاویه صفحاتی که تنش‌های اصلی روی آنها عمل می‌کنند برابرند با:

$$2\theta'p = tg^{-1}\ \frac{30}{20} = 56.30° \ ,\ 2\theta''p = 56.30° + 180 = 236.30°$$

در نتیجه:

$\theta'p = 28.15°$ و $\theta''p = 118.15$

دایرهٔ مور نشان می‌دهد که $\theta'p$ مربوط به صفحه σ_1 است. حالت تنش‌های اصلی در شکل (1-7c) نشان داده شده است.

(b) تنش‌های برشی ماکزیمم با نقاط D و E نشان داده شده‌اند. در نتیجه:

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\ (80-40)^2 + (30)^2} = \pm 36.05 \text{ MPa}$$

دیده می‌شود که $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ به همین نتیجه منجر می‌شود. زاویه صفحاتی که روی آنها تنش‌های برشی ماکزیمم وارد می‌شود برابرند با:

$\theta'_s = 28.15° + 45° = 73.15°$ و $\theta''_s = 163.15°$

دایرهٔ مور نشان می‌دهد که تنش برشی ماکزیمم مثبت روی صفحه‌ای عمل می‌کند که نرمال x' آن با محور x زاویهٔ θ'_s تشکیل می‌دهد. در نتیجه τ_{max} + روی دو رویه x' از المان باید طوری وارد شود که کوپل نتیجه از آن در جهت عقربه‌های ساعت باشد، شکل (1-7b) . تنش نرمال روی سطوح تنش برشی ماکزیمم برابر $\sigma' = 60$ MPa است. بدین

ترتیب المان تنش برشی ماکزیمم طبق شکل (1-7d) خواهد بود.

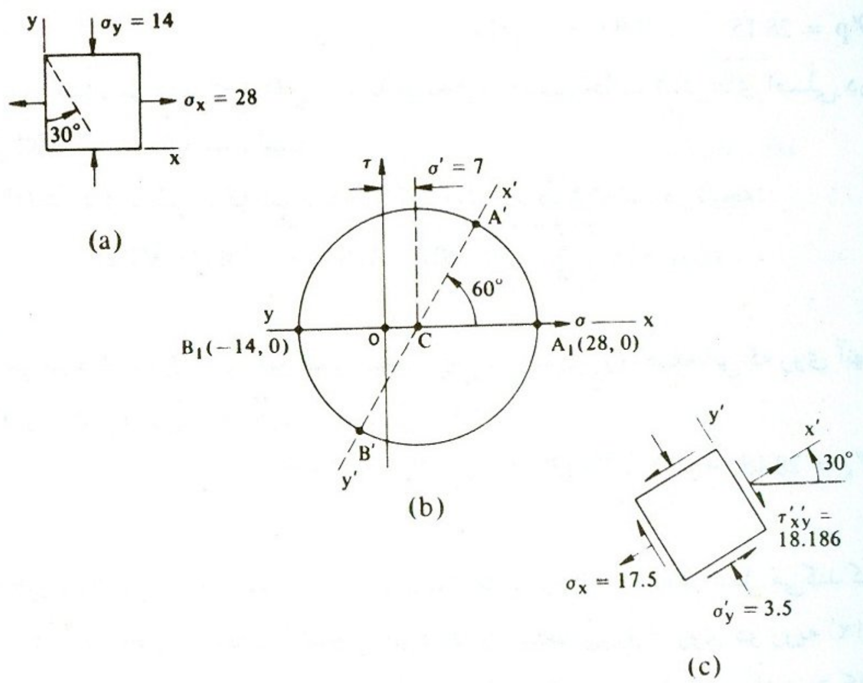
حالت تنش در نقطه به شکل‌های ماتریسی زیر می‌تواند نشان داده شود؛

$$\begin{bmatrix} 80 & 30 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} \text{و} \begin{bmatrix} 96.50 & 0 \\ 0 & 23.95 \end{bmatrix} \text{و} \begin{bmatrix} 60 & -36.05 \\ -36.05 & 60 \end{bmatrix}$$

که به ترتیب مربوط به صفحات $\theta=0°$، $\theta = 28.15°$ و $\theta_1 = 73.15°$ بوده و هم‌ارز هستند.

مثال 1-2

تنش‌های عمل کننده روی المانی از یک جسم برحسب مگاپاسکال مطابق شکل (1-8a) است. با استفاده از دایرهٔ مور تنش‌های نرمال و برشی روی صفحه‌ای با زاویهٔ $\theta=30°$ را تعیین کنید.



شکل (1-8)

حل: دایرهٔ مور برای این المان در شکل (1-8b) نشان داده شده است. نقاط A_1 و B_1 مؤلفه‌های تنش روی رویه‌های x و y را نشان می‌دهند. شعاع دایره برابر $(14+28)/2$ است.

برای صفحهٔ $30°$ روی المان، باید در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ $60°$ چرخید. بدین ترتیب نقطهٔ A' بدست می‌آید. چرخش $240°$ نیز نقطهٔ B' را مشخص می‌کند. باتوجه به دایرهٔ مور نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_{x'} = 7 + 21 \cos 60° = 17.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = -3.5 \text{ MPa}$$

و

$$\tau_{x'y'} = \pm 21 \sin 60° = \pm 18.186 \text{ MPa}$$

شکل (1-8c) المان تحت این تنش‌ها را نشان می‌دهد.

1-8 حالت تنش سه‌محوری در یک نقطه

روابط انتقال تنش سه محوری با همان روش بکار رفته در تنش دومحوری به دست می‌آیند.

المان چهار وجهی جدا شده از یک محیط پیوسته، درحالت کلی تنش، در شکل (1-9) نشان داده شده است. فرض می‌شود که نیروهای حجمی قابل صرفنظر کردن هستند. در این شکل T_x ، T_y و T_z مؤلفه‌های کارتزین منتجه تنش $\vec{T}$ روی صفحه ABC می‌باشند. باید رابطه بین این مؤلفه‌ها با تنش‌های وارده روی سه رویه متعامد المان به دست آید.

وضعیت صفحه ABC با زوایای نرمال یکه $\vec{n}$ و جهت‌های x و y و z مشخص می‌شود. کسینوسهای هادی مربوط به این زوایا برابرند با:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n},x) &= l \\ \cos(\vec{n},y) &= m \\ \cos(\vec{n},z) &= n \end{aligned} \qquad (1\text{-}12)$$

کسینوسهای هادی برای جهت $\vec{n}$ با رابطهٔ زیر بهم وابسته‌اند:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (1\text{-}13)$$

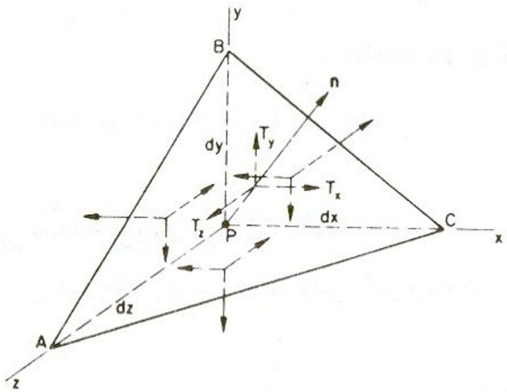
سطح رویه‌های PAB ، PAC و PBC را مـی‌توان برحسب سطح ABC ، A ، و کسینوسهای هادی به صورت زیر به دست آورد؛

$$A_{PAB} = A_x = \vec{A}\,.\,\vec{L} = A\,(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})\,.\,\vec{i} = Al$$

دوسطح دیگر نیز با روش مشابه بدست می‌آیند. در نتیجه:

$$A_{PAB} = Al \quad , \quad A_{PAC} = Am \quad , \quad A_{PBC} = An \qquad (1\text{-}14)$$

در این روابط $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در جهت‌های x ، y و z هستند.



شکل (1-9)

حال با نوشتن روابط تعادل در جهت‌های x ، y و z و با استفاده از روابط (1-14) نتیجه خواهد شد؛

در محور مختصات x'y'z' ... را خواهند رفت

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x l + \tau_{xy}\, m + \tau_{xz}\, n \\ T_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y\, m + \tau_{yz}\, n \\ T_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \end{aligned} \qquad (1\text{-}15)$$

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب منتجه تنش روی A با دانستن مؤلفه‌های تنش σ_x ، σ_y ، τ_{xy} ، τ_{xz} و τ_{yz} و

دانستن وضعیت صفحه A بدست می‌آید. درحد وقتی رویه‌های چهاروجهی بسمت صفر میل کند، صفحه A نقطه P را شامل می‌شود، و حالت تنش در نقطه مشخص می‌شود. با دانستن این حالت تنش، مؤلفه‌های تنش روی هر سه صفحه متعامد عبور نموده از نقطه P بصورت زیر بدست خواهد آمد.

حال محورهای کارتزین x' ، y' و z' طوری انتخاب می‌شوند که x' بر $\vec{n}$ منطبق بوده و محورهای y' و z' روی سطح مایل قرار داشته باشند. محورهای مختصات $x'y'z'$ و xyz با کسینوسهای هادی؛

$$l_1 = \mathrm{Cos}\,(x' , x) \quad , \quad m_1 = \mathrm{Cos}\,(x' , y) \quad , \quad \ldots$$

بهم وابسته‌اند. نمادگذاری مربوط به سری کامل کسینوسهای هادی در جدول (1-2) نشان داده شده‌اند. تنش نرمال $\sigma_{x'}$ با تصویر کردن مؤلفه‌های T_x ، T_y و T_z در جهت x' و جمع آنها بدست می‌آید. در نتیجه:

$$\sigma_{x'} = T_x l_1 + T_y m_1 + T_z n_1 \qquad (1\text{-}16)$$

$\tau_{x'y'} = T_x l_2 + T_y m_2 + T_z n_2$

با ترکیب روابط (1-15) و (1-16) نتیجه خواهد شد:

$\tau_{x'z'} = T_x l_3 + T_y m_3 + T_z n_3$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\,(\tau_{xy}\, l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{xz}\, l_1 n_1) \qquad (1\text{-}17a)$$

به طریق مشابه با تصویر کردن T_x ، T_y و T_z در جهت‌های y' و z' نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} = {} & \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}\,(l_1 m_2 + m_1 l_2) \\ & + \tau_{yz}\,(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{xz}\,(n_1 l_2 + l_1 n_2) \end{aligned} \qquad (1\text{-}17b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} = {} & \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy}\,(l_1 m_3 + m_1 l_3) \\ & + \tau_{yz}\,(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \tau_{xz}\,(n_1 l_3 + l_1 n_3) \end{aligned} \qquad (1\text{-}17c)$$

جدول (1-2)

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

باتوجه به اینکه برای مشخص شدن حالت تنش در هر نقطه باید تنش‌های روی سه صفحه متعامد در نقطه را دانست، حال که تنش روی یکی از این صفحات (صفحه مایل بررسی شده فوق) شناخته شده است می‌توان تنش روی دو صفحه دیگر عمود بر صفحه مایل را به دست آورد. برای یکی ازاین صفحات $\vec{n}$ باید در جهت y' قرار گیرد و مؤلفه‌های تنش $\sigma_{z'}$، $\tau_{z'x'}$ و $\tau_{z'y'}$ به دست خواهد آمد. باتوجه به تقارن تانسور تنش فقط کافیست شش مؤلفه از نه مؤلفه تنش را به دست آورد. سه مؤلفه تنش طبق روابط (1-7a) تا (1-17c) قبلاً به دست آمده است، و سه مؤلفه باقیمانده به صورت زیر خواهند بود؛

$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\,(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{xz} l_2 n_2) \qquad (1\text{-}17d)$$

$$\sigma_{z'} = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\,(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{xz} l_3 n_3) \qquad (1\text{-}17e)$$

$$\tau_{y'z'} = \sigma_x l_2 l^2 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_2 n_2 n_3 + \tau_{xy}\,(m_2 l_3 + l_2 m_3) + \tau_{yz}\,(n_2 m_3 + m_2 n_3) + \tau_{xz}\,(l_2 n_3 + n_2 l_3) \qquad (1\text{-}17f)$$

روابط (1-17) روابط انتقال مقادیر $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}$ است که به طور کامل حالت تنش را بیان می‌کند. کمیت‌هائی مثل تنش (و ممان اینرسی - پیوست C) که این نوع انتقال می‌یابند تانسور رتبه دو هستند.

باید توجه داشت که چون محورهای x'، y' و z' متعامد هستند، نه کسینوس هادی باید در روابط مثلثاتی زیر صادق باشند؛

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (a)$$

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (b)$$

از جدول (1-2) پیدا است که روابط (a) جمع مربعات کسینوسهای هادی هر ردیف جدول، و روابط (b) جمع حاصلضرب کسینوسهای هادی در هر دو ردیف است.

1-9 تنش‌های اصلی در حالت سه‌محوری

برای حالت سه محوری نشان داده می‌شود که سه صفحه با تنش برشی صفر وجود دارند، که دو به دو برهم عمودند، و تنش‌های نرمال روی آنها مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم را دارا هستند. این تنش‌های نرمال، «تنش‌های اصلی»، نامیده می‌شوند و آنها را با σ_1، σ_2 و σ_3 نشان می‌دهند. بیشترین مقدار جبری تنش را σ_1 و کمترین مقدار را σ_3 نامند. مجدداً یک صفحه مایل x' در نظر گرفته می‌شود. تنش نرمال روی این صفحه طبق رابطهٔ (1-17a) برابر است با؛

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\,(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{xz} l n) \qquad (a)$$

حال باید مقدار حد تنش $\sigma_{x'}$ را به دست آورد. بدین منظور تغییرات $\sigma_{x'}$ نسبت به کسینوسهای هادی باید بررسی شود. سه کسینوس هادی l، m و n با رابطهٔ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ به هم وابسته‌اند، در نتیجه از این مقدار فقط l و m را می‌توان مستقل در نظر گرفت. در نتیجه؛

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial l} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma x'}{\partial m} = 0 \qquad (b)$$

با مشتق گرفتن از رابطه (a)، و با استفاده از رابطهٔ (1-15) نتیجه می‌شود؛

$$T_x + T_z \frac{\partial n}{\partial l} = 0 \quad , \quad T_y + T_z \frac{\partial n}{\partial m} = 0 \qquad (c)$$

از رابطهٔ $n^2 = 1 - l^2 - m^2$، $\frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-l}{n}$، $\frac{\partial n}{\partial m} = -m/n$ می‌شود. با قراردادن این مقادیر در رابطهٔ (c)، روابط زیر بین مؤلفه‌های $\vec{T}$ و $\vec{n}$ بدست می‌آید:

$$\frac{T_x}{l} = \frac{T_y}{m} = \frac{T_z}{n} \qquad (d)$$

این تناسب‌ها نشان می‌دهند که منتجه تنش باید موازی بردار یکه باشد، و در نتیجه مؤلفه تنش برشی ندارد. در نتیجه روی صفحه‌ای که تنش σ_x' مقدار حد خود را دارا است تنش برشی صفر است. این صفحه «صفحه اصلی» نامیده می‌شود.

حال باید نشان داد که سه صفحه اصلی و در نتیجه سه تنش اصلی وجود دارد. با نشان دادن تنش اصلی به صورت σ_p، رابطهٔ (d) را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$T_x = \sigma_p l \quad , \quad T_y = \sigma_p m \quad , \quad T_z = \sigma_p n \tag{e}$$

این رابطه همراه با روابط (1-15) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_p)\, l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_p)\, m + \tau_{yz} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma_p) n &= 0 \end{aligned} \tag{1-18}$$

$l^2 + m^2 + n^2 = 1$

برای اینکه جواب کسینوسهای هادی مخالف صفر باشد، باید دترمینان ضرایب صفر شود.

در نتیجه؛

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

از رابطهٔ (1-19) نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0 \tag{1-20}$$

که در آن؛

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1-21}$$

سه جواب رابطهٔ درجهٔ سه (1-20) تنش‌های اصلی هستند. در رابطه با این سه تنش، سه سری کسینوسهای هادی وجود دارند که موقعیت صفحات اصلی را نسبت به محورهای مختصات اولیه مشخص می‌نمایند. تنش‌های اصلی مقادیر ویژه تانسور تنش τ_{ij} می‌باشند. چون تانسور تنش یک تانسور متقارن با المان‌های حقیقی است، مقادیر ویژه آن هم حقیقی خواهد بود. به عبارت دیگر هر سه تنش اصلی حقیقی هستند. کسینوسهای هادی l، m و n بردارهای ویژه τ_{ij} می‌باشند.

واضح است که تنش‌های اصلی مستقل از جهت سیستم محورهای اولیه هستند. در نتیجه در روابط (1-20)، مقادیر I_1، I_2 و I_3 نیز مستقل از x و y و z خواهند بود، چون در غیر اینصورت تنش‌های اصلی تغییر خواهند کرد. برای مثال با جمع روابط مربوط به σ_x'، σ_y' و σ_z' از رابطهٔ (1-17) و با استفاده از روابط (a) و (b) قسمت قبل نتیجه می‌شود؛

$$I_1 = \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

در نتیجه ضرایب I_1، I_2 و I_3 ثابت‌های تانسور تنش می‌باشند.

حال اگر یکی از تنش‌های اصلی، مثلاً σ_1 از رابطهٔ (1-20)، مشخص باشد، با قرار دادن آن در رابطهٔ (1-18) روابطی بدست می‌آید که همراه با $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ برای بدست آوردن مقادیر کسینوسهای هادی کافی است. بدین ترتیب می‌توان جهت σ_1 را نسبت به سیستم محورهای xyz به دست آورد. با روش مشابه جهت تنش‌های σ_2 و σ_3 به دست می‌آید. در حالتیکه $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ است، می‌توان نشان داد که همه صفحات داخل محیط پیوسته صفحات اصلی هستند. چنین حالتی در مایع ایده‌آل، که در آن تنش‌های برشی صفر هستند، و در حالت تنش هیدرواستاتیک پیش می‌آید.

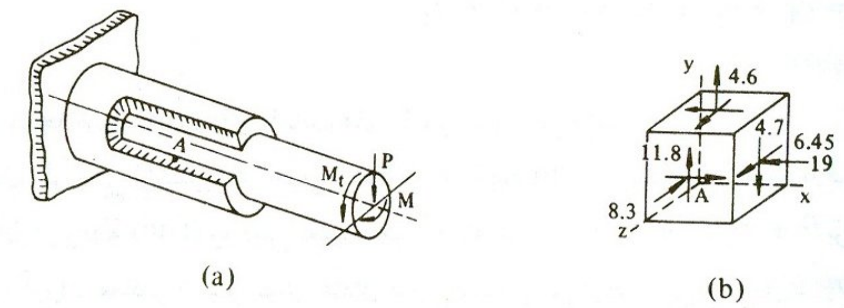
مثال 1-3

یک میله فولادی داخل لوله چدنی یک سرگیردار جا زده شده است. این میله تحت ممان خمشی M، کوپل پیچشی M_t، و بار عرضی P قرار دارد، شکل (1-10a). در نقطه

A از لوله میدان تنش مطابق شکل (1-10b) است، و مقادیر مؤلفه‌های تنش به صورت ماتریس زیر می‌باشد؛

$$\begin{bmatrix} -19 & -4.7 & -6.45 \\ -4.7 & 4.6 & 11.8 \\ 6.45 & 11.8 & -8.3 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

تنش‌های اصلی و جهت صفحات اصلی رانسبت به سیستم محورهای اولیه پیدا کنید.



شکل (1-10)

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \qquad (1\text{-}20)$$

حل: با قراردادن تنش‌ها در رابطهٔ (1-20) و با استفاده از روابط (B.2) نتیجه می‌شود؛

$\sigma_1 = 11.618$ MPa , $\sigma_2 = -9.001$ MPa , $\sigma_3 = -25.316$ MPa

با قراردادن این مقادیر به ترتیب در رابطهٔ (1-18) ، و با استفاده از رابطهٔ (1-13) با (B-6) ، کسینوسهای هادی صفحات اصلی مربوط به σ_1 ، σ_2 و σ_3 برابر خواهند شد با؛

$l_1 = 0.0266$, $m_1 = -0.8638$, $n_1 = -0.5\text{-}31$

$l_2 = -0.6209$, $m_2 = 0.3802$, $n_2 = -0.6855$

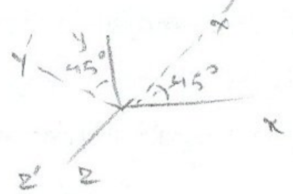
$l_3 = 0.7834$, $m_3 = 0.3806$, $n_3 = -0.5262$

باید توجه داشت که جهت‌های اصلی برای برآورد ابعاد نهائی جسم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال 1-4

تانسور تنش برای نقطه‌ای از یک عضو ماشین نسبت به یک سیستم محورهای مختصات کارتزین به صورت زیر داده شده است؛

$$\begin{bmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad \text{(f)}$$



حالت تنش و I_1 ، I_2 و I_3 را برای سیستم محورهای $x'y'z'$ پیدا کنید. در سیستم محورهای مختصات جدید محورهای x و y در خلاف جهت عقربه‌های ساعت 45° چرخیده‌اند.

حل: باتوجه به چرخش محورهای جدید، کسینوسهای هادی برابرند با؛

$l_1 = m_1 = m_2 = 1 / \sqrt{2}$ $\quad n_1 = n_2 = l_3 = m_3 = 0$

$l_2 = -1 / \sqrt{2}$

$n_3 = 1$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & \quad y & \quad z \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

با استفاده از رابطهٔ (1-17) نتیجه می‌شود؛

$$\begin{bmatrix} 45 & -15 & 28.28 \\ -15 & 25 & 28.28 \\ 28.28 & 28.28 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad \text{(g)}$$

با قراردادن هر یک از دو آرایه (f) و (g) در رابطه (1-21) نتیجه خواهد شد؛

$I_1 = 100 \quad , \quad I_2 = 1400 \quad , \quad I_3 = -53{,}000$

1-10 تنش‌های نرمال و برشی روی یک سطح مایل

در برخی موارد لازم است که با دانستن تنش‌های اصلی، تنش‌های نرمال و برشی روی یک سطح مایل، شکل (1-11a)، محاسبه شود. در این شکل محورهای x، y و z موازی محورهای اصلی هستند. با نشان دادن کسینوسهای هادی سطح ABC با l، m و n و با توجه به؛

$$\sigma_x = \sigma_1 \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \circ \quad , \quad ....$$

رابطهٔ (1-15) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T_x = \sigma_1 l \quad , \quad T_y = \sigma_2 m \quad , \quad T_z = \sigma_3 n$$

در نتیجه منتجه تنش روی سطح مایل برابر می‌شود با:

$$T^2 = \sigma_1^2\, l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 = \sigma^2 + \tau^2 \tag{a}$$

تنش نرمال روی این سطح از رابطهٔ (1-17a) برابر می‌شود با:

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \tag{1-22}$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (a)، تنش برشی برابر خواهد شد با:

$$\tau^2 = \sigma_1^2\, l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \tag{1-23}$$

با بسط این رابطه و با استفاده از:

$$1 - l^2 = m^2 + n^2$$

$$1 - n^2 = l^2 + m^2 \ , \ ...$$

نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\tau = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2\, l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\, m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\, n^2 l^2\,]^{1/2} \tag{1-24}$$

مجدداً این رابطه نشان می‌دهد که اگر همه تنش‌های اصلی برابر باشند، تنش برشی صفر خواهد شد.

درحالتی که روی سطوح عمود بر هم شکل (1-11a) علاوه بر تنش‌های نرمال تنش‌های برشی هم عمل می‌کند، روابط (1-22) و (1-24) به صورت زیر درمی‌آیند:

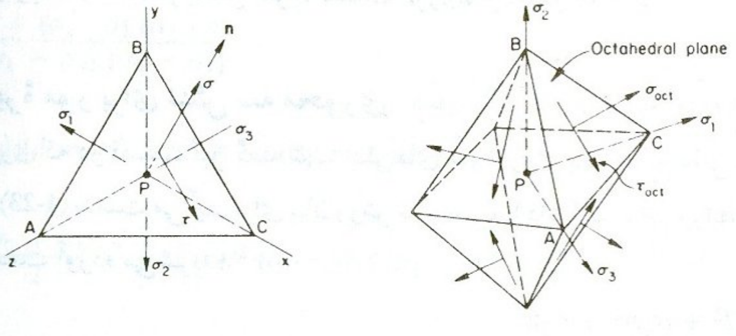
$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\,(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{xz} l n) \tag{1-25}$$

و

$$\tau = [(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n)^2 + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n)^2$$

$$+ (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n)^2 - \sigma^2\,]^{1/2} \tag{1-26}$$

که درآن σ با رابطهٔ (1-25) داده شده است. روابط (1-22) تا (1-26) روابط ساده شده انتقال برای تنش سه محوری هستند.



(a) (b)

شکل (1-11)

مثال 1-5

تنش برشی روی رویه ABC شکل (1-11a) را درحالت PA = PB = PC به دست آورید. این سطح در تئوری تسلیم جسم مورد توجه است.

حل: نرمال این سطح باید دارای کسینوسهای هادی مساوی نسبت به محورهای اصلی باشد. باتوجه به:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

نتیجه می‌شود؛

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (b)$$

سطح ABC یکی از هشت رویه هشت وجهی منظم شکل (1-11b) خواهد بود. با استفاده از روابط (1-23) و (b) «تنش برشی هشت وجهی» به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2} \qquad (1\text{-}27)$$

با استفاده از روابط (1-22) و (b)، «تنش نرمال هشت وجهی» برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (1\text{-}28)$$

تنش نرمال روی سطح هشت وجهی متوسط تنش‌های اصلی است و «تنش متوسط» نامیده می‌شود. جهت‌های σ_{oct} و τ_{oct} در شکل (1-11b) نشان داده شده است. شکل دیگری از رابطهٔ (1-27) در بخش سوم، قسمت انرژی، ارائه خواهد شد.

1-11 دایرهٔ مور برای تنش سه محوری

به طوری که در قسمت قبل گفته شد، تنش‌های σ و τ روی یک سطح مایل ازروابط (1-22) و (1-23) بدست می‌آید. برای بیان روش ترسیمی، یا دایرهٔ مور، این روابط مجدداً در این قسمت آورده می‌شوند؛

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \qquad (a)$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \qquad (b)$$

در ضمن بین کسینوسهای هادی رابطهٔ زیر برقرار است؛

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (c)$$

از این سه رابطه می‌توان مقادیر l^2، m^2 و n^2 را به دست آورد. از رابطهٔ (c) نتیجه

می‌شود؛

$$m^2 = 1 - l^2 - n^2 \qquad (d)$$

با قراردادن این مقدار در رابطهٔ (a) نتیجه خواهد شد.

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 (1 - l^2 - n^2) + \sigma_3 n^2 \qquad (e)$$

و در نتیجه؛

$$n^2 = \frac{\sigma + l^2(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_2} \qquad (f)$$

با قراردادن مقادیر m^2 از رابطهٔ (d) و n^2 از رابطهٔ (f) در رابطه (b)، نتیجه می‌شود؛

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \qquad (g)$$

و به طریق مشابه؛

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_3 - \sigma)(\sigma_1 - \sigma)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \qquad (h)$$

و

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_3)} \qquad (i)$$

رابطهٔ (g) را می‌توان به صورت زیر؛

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

و یا؛

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad (1\text{-}29)$$

نوشت.

اگر l، m و n داده شده باشند، σ و τ روی دایره‌ای قراردارند که معادله آن به صورت رابطهٔ (1-29) است. در ترسیم دایره محور افقی σ و محور قائم τ، و شعاع دایره برابر خواهد بود با؛

$$\sqrt{l^2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + [(\sigma_2 - \sigma_3)/2]^2} \qquad (j)$$

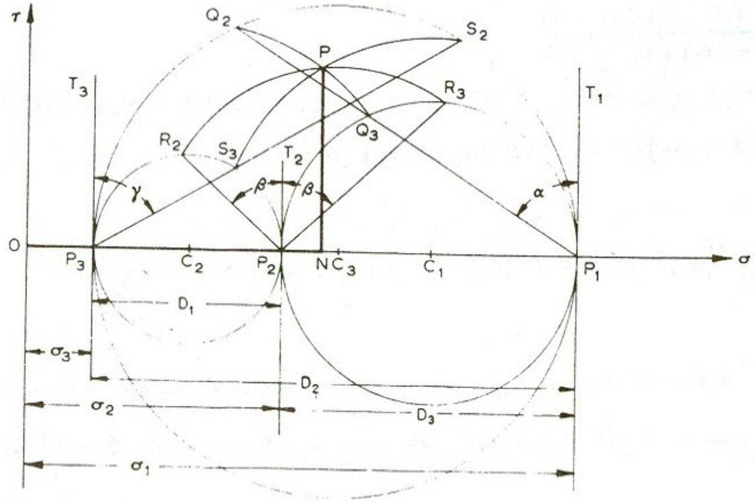
محورهای σ و τ را رسم کرده و روی محور σ نقاط P_1 و P_2 و P_3 انتخاب می‌گردد که

$OP_2=\sigma_1$ ، $OP_2=\sigma_2$ و $OP_3=\sigma_3$ باشد. سپس دوایری به قطرهای P_1P_2 ، P_2P_3 و P_3P_1 به مراکز C_1 ، C_2 و C_3 در؛

$$\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}, 0\right)$$

رسم می‌شود. از نقاط P_1 ، P_2 و P_3 سه خط P_1T_1 و P_3T_3 موازی محور τ ترسیم می‌گردد، شکل (1-12). از نقطه P_1 خطی با زاویه α نسبت به P_1T_1 طوری رسم می‌شود که در آن $\mathrm{Cos}\alpha = l$ باشد. این خط دوایر P_1P_2 و P_1P_3 را درنقاط Q_3 و Q_2 قطع می‌کند. مختصات نقطه Q_3 برابر است با؛

$\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{Cos}^2\alpha$ و $(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}\alpha$



شکل (1-12)

با داشتن این مختصات طول C_2Q_3 برابر خواهد شد با؛

$$(C_2Q_3)^2 = \left[\frac{(\sigma_2-\sigma_3)+2(\sigma_1-\sigma_2)\,l^2}{2}\right]^2 + \left[(\sigma_1-\sigma_2)/\sqrt{1-l^2}\,\right]^2$$
$$= \left[\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)\right] \quad (k)$$

مقایسه دو رابطهٔ (k) و (j) نشان می‌دهد که C_2Q_3 برابر شعاع دایره‌ای است که نقطه‌ای با تنش‌های σ و τ روی آن قرار دارد. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که؛

$C_2Q_2 = C_2Q_3$

با روشی مشابه روش فوق و با استفاده از روابط (h) و (i) برای m^2 و n^2 ، σ و τ روی:

۱ـ دایره‌ای به مرکز C_3 و شعاع $C_3R_2 = C_3R_3$ قرار دارد که در آن R_2 و R_3 نقاط تقاطع خط‌های رسم شده از P_2 با زاویه β $(\mathrm{Cos}\beta = m)$ نسبت به خط P_3T_2 ، با دوایر P_2P_1 و P_2P_3 می‌باشد.

۲ـ دایره‌ای به مرکز C_1 و شعاع $C_1S_2 = C_1S_3$ قرار دارد که در آن S_2 و S_3 نقاط تقاطع خط رسم شده از P_3 با زاویه γ $(\mathrm{Cos}\gamma = n)$ نسبت به خط P_3T_3 ، با دوایر P_3P_2 و P_3P_1 است. قرار خواهد داشت. بدین طریق نقطه P با مؤلفه‌های σ و τ نقطه تقاطع سه دایره فوق خواهد بود، شکل (1-12).

باتوجه به بحث فوق برای تعیین σ و τ با دانستن σ_1 ، σ_2 و σ_3 به ترتیب زیر عمل می‌شود؛

۱ـ محورهای کارتزین σ و τ انتخاب شده و روی محور σ نقاط P_1 ، P_2 و P_3 طوری انتخاب می‌شود که؛

$OP_1 = \sigma_1$ و $OP_2 = \sigma_2$ و $OP_3 = \sigma_3$

باشد.

۲ـ دوایری به قطرهای P_1P_2 ، P_2P_3 و P_3P_1 با مراکز C_1 ، C_2 و C_3 رسم می‌شود.

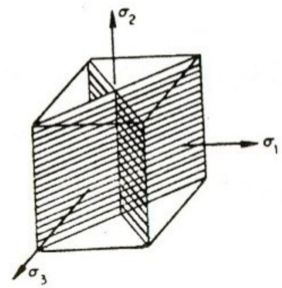
۳ـ خطوط P_1T_1 و P_3T_3 موازی محور τ رسم می‌گردد.

۴ـ خط P_1Q_2 بازاویه α ($\cos\alpha = l$) نسبت به P_1T_1 ، و خط P_3S_3 با زاویه γ ($\cos\gamma = \gamma$) نسبت به P_3T_3 رسم شده تا دایره‌ای قسمت 2 را در نقاط Q_3 ، Q_2 ، S_3 و S_2 قطع نماید.

۵ـ به مرکز C_1 قوس S_2S_3 به شعاع C_1S_2، و به مرکز C_2 قوس Q_2Q_3 به شعاع C_2Q_2 رسم شده تا یکدیگر را در نقطه P قطع نمایند. مؤلفه‌های P (PN, ON) تنش‌های σ و τ را بدست خواهد داد. باتوجه به روش ترسیمی فوق نتیجه می‌شود که نقطه P همواره بین منطقه محصور شده توسط سه دایرهٔ C_1 ، C_2 و C_3 و یا روی این دوایر قرار خواهند داشت. بیشترین مقدار تنش برشی برابر خواهد شد با؛

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{1-30}$$

و این تنش روی صفحاتی عمل می‌کند که نیمساز صفحات تنش اصلی ماکزیمم و می‌نیمم است، شکل (1-13).



شکل (1-13)

1-12 تغییرات تنش روی مرز یک جسم

حال روابط بین مؤلفه‌های تنش و نیروهای سطحی داده شده روی مرز جسم بررسی می‌شود. روابط تعادل در داخل جسم در قسمت 1-4 ارائه شد. این روابط باید در نواحی مرزی با نیروهای سطحی در حال تعادل باشند. به عبارت دیگر نیروهای خارجی

می‌تواند ادامه توزیع تنش‌های داخلی در نظر گرفته شوند. کنج چهار وجهی شکل (1-9) مجدداً در نظر گرفته شده، فرض می‌شود سطح مایل ABC یک رویه مرزی جسم است. مؤلفه‌های منتجه تنش $\vec{T}$ در این صورت نیروهای سطحی T_x ، T_y و T_z بر واحد سطح خواهند بود و «کشش‌های سطحی»[1] نامیده می‌شوند. روابط تعادل برای این المان، شرایط مرزی را نشان می‌دهند و با استفاده از رابطهٔ (1-15) ، به صورت زیر خواهند بود؛

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ T_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ T_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{1-31}$$

برای مثال اگر سطح مرزی عمود بر محور x باشد، ازرابطهٔ (1-31) نتیجه خواهد شد؛

$$T_x = \sigma_x \quad , \quad T_y = \tau_{xy} \quad , \quad T_z = \tau_{xz}$$

در این صورت مؤلفه‌های نیروی سطحی، T_x ، T_y و T_z با σ_x، τ_{xy} و τ_{xz} درحال تعادل خواهند بود.

باید توجه داشت که در برخی موارد شرایط مرزی به جای توزیع نیروهای سطحی روی مرز، ممکن است به صورت مؤلفه‌های تغییرمکان روی مرز داده شده باشند. در این موارد باید روابط تعادل به کمک قانون هوک به روابط بین کرنش‌های تبدیل شده و با استفاده ازروابط کرنش ـ تغییرمکان، نهایتاً روابط به صورت روابطی بین مؤلفه‌های تغیر مکان درآید.

1- Surface tractions