۴

مراکز آنی دوران

۱.۴ مقدمه

دراین فصل و فصل بعد روشهای زیادی برای تعیین سرعت در مکانیسمهای مختلف ارائه می‌شود. دانستن مفهوم مرکز آنی دوران در بیان یکی ازاین روشها لازم است. سرعت کمیت مهمی است زیرا مبین زمان لازم برای انجام عملی مشخص، مثلاً ماشینکاری یك قطعه است. قدرت از ضرب‌کردن نیرو در سرعت به‌دست می‌آید. بنابراین برای انتقال قدرتی معین می‌توان باتغییر سرعت، که از تغییر ابعاد میله‌ها حاصل می‌شود، نیروها و تنشها را درمیله‌های مختلف مکانیسم کاهش‌داد. اصطکاك وسایش‌قطعات ماشین نیزبه‌سرعت وابسته است. همچنین اگر بخواهیم شتاب را درمکانیسمی تحلیل‌کنیم پیش ازآن باید به تعیین سرعت بپردازیم.

تعیین سرعتها در یك مکانیسم در واقع یافتن مقادیر سرعت برای موقعیت لحظه‌ای میله‌هاست. می‌توان هرمیله‌ای را که دارای حرکت صفحه‌ای است درحالت دوران حول نقطه‌ای خاص ازصفحهٔ حرکت خود درنظرگرفت. نقطهٔ مذکور مرکز دوران میله است که ممکن است روی میله قرار داشته یا نداشته باشد. همچنین در بعضی از میله‌ها این‌مراکز دوران ساکن هستند، درحالی که در دیگر میله‌ها مراکز دوران حرکت می‌کنند. اصطلاح مرکز آنی دوران به‌مرکز دوران جسم در یك‌لحظهٔ بینهایت‌کوتاه اطلاق می‌شود.

۲.۴ مرکز آنی دوران

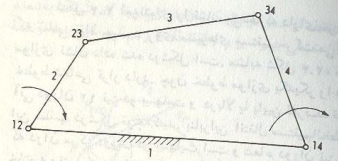
مرکز آنی دوران عبارت است از ۱. نقطه‌ای در یک جسم که جسم دیگری به‌طور دائمی یا در یک لحظه حول آن می‌چرخد. ۲. نقطهٔ مشترک دو جسم که دارای سرعت خطی یکسان، هم در اندازه و هم در راستا، در هر دو جسم است. هر دو تعریف بالا حائز اهمیت‌اند زیرا از آنها برای تعیین محل مراکز آنی دوران استفاده می‌شود.

۳.۴ مرکز آنی دوران در اتصال مفصلی

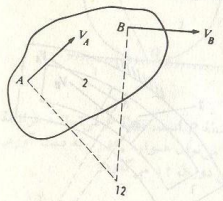
در چهارمیله‌ای شکل ۱.۴، هر اتصال مفصلی خود یک مرکز آنی دوران است. معمولاً این مراکز را با شمارهٔ میله‌هایی که دراین نقاط به‌هم مفصل شده‌اند، نامگذاری می‌کنند. بنابراین نقطه‌ای ازمیلهٔ ۱ که میلهٔ ۲ حول آن می‌چرخد به‌صورت ۱۲ نام‌گذاری شده و یک ـ دو خوانده می‌شود. اگر میلهٔ ۲ ثابت نگه داشته شود ومیلهٔ ۱ بتواند دوران کند، حرکت نسبی میله‌های ۱ و ۲ تا زمانی که چرخش حول نقطهٔ ۱۲ صورت گیرد، تغییر نمی‌کند. بنابراین مرکزآنی دوران ۱۲ را می‌توان به‌عنوان نقطه‌ای ازمیلهٔ ۲ که میلهٔ ۱ حول آن می‌چرخد، مطرح کرد. همین‌طور مرکز آنی دوران ۲۳ نیز نقطه‌ای از میلهٔ ۲ است که میلهٔ ۳ حول آن می‌چرخد یا نقطه‌ای ازمیلهٔ ۳ است که میلهٔ ۲ حول آن می‌چرخد. مراکز آنی دوران ۱۲ و ۱۴، درهنگام کار مکانیسم، در زمین یا چهارچوب ثابت نگه داشته شده‌اند و آنها را مراکزثابت می‌نامیم. مراکزآنی دوران ۲۳ و ۳۴ که نسبت به‌زمین حرکت می‌کنند مراکزمتحرک نامیده میشوند.

۴.۴ مرکزآنی دوران برای جسمی که راستای سرعتهای دو نقطه ازآن معلوم باشد.

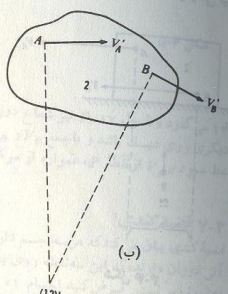
هر دو جسمی که نسبت به‌یکدیگر حرکت نسبی دارند، دارای یک مرکز آنی دوران‌اند. در شکل ۲.۴ صفحهٔ کاغذ به‌عنوان عضو ساکن یا جسم ۱ درنظر گرفته می‌شود. فرض کنید در شکل ۲.۴ الف، نقاط A و B از جسم ۲ دارای سرعتهای خطی با امتدادهای مشخص باشند. چون سرعتهای خطی تمامی نقاط جسم درحال دوران، عمود بر شعاع دورانشان است، پس می‌توانیم خطوط عمود بر امتدادهای سرعت را همان‌طور که‌درشکل آمده است باخط چین رسم کنیم. محل برخورد این دوامتداد، مرکز آنی دوران ۱۲ است؛ نقطه‌ای از جسم ۱ که جسم ۲ حول آن می‌چرخد. بنابراین اگر امتداد سرعتهای خطی دو نقطه از یک‌جسم معلوم باشد، می‌توان مرکزآنی دوران را به‌دست آورد، به‌شرط‌آنکه دونقطهٔ فوق روی خط شعاعی مشترک قرار نداشته باشند. جسم ۲ درحال حرکت است وموقعیت آن درلحظهٔ بعد درشکل ۲.۴ ب رسم شده است. فرض کنیدکه سرعت نقاط A و B دارای مقادیر جدید V'_A و V'_B باشد. درآن‌صورت خطچینهای عمود بر V'_A و V'_B،



شکل ۱.۴



(الف)



(ب)

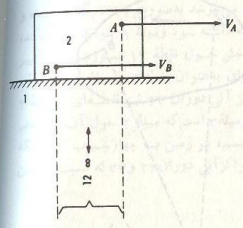
شکل ۲.۴

درنقطهٔ (۱۲) یکدیگر را قطع می‌کنند، که محل مرکز دوران درلحظهٔ مورد نظر است. بنابراین وقتی جسمی حرکت می‌کند مرکز دوران آن ممکن است درهر لحظه تغییر کند. به‌همین دلیل به‌آن مرکزآنی دوران می‌گویند و گاهی آن را سنترو و گاهی قطب می‌نامند.

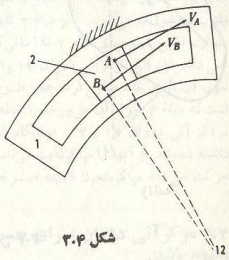
۵.۴ مرکز آنی دوران جسم درحال لغزش

درشکل ۳.۴، جسم ۲ دریک شیار دایره‌ای درجسم ۱ می‌لغزد. بنابراین تمامی نقاط‌جسم لغزنده در امتداد مسیرهای دایره‌ای حرکت می‌کنندکه مراکز آنها درنقطه‌ای از جسم ۱ قرار دارد. پس نقطهٔ ۱۲ مرکز آنی دوران این دو جسم است.

شکل ۴.۴ لغزنده‌ای را نشان می‌دهدکه دارای حرکت مستقیم‌الخط است. ازآنجا که تمامی نقاط جسم ۲ روی مسیرهای مستقیم حرکت می‌کنند، شعاع دوران آنها خطوط موازی نشان داده شده درشکل است. مشابه شکل ۲.۴، مرکز دوران درنقطهٔ تلاقی این خطوط شعاعی قرار دارد. چون خطوط موازی یکدیگر را دربینهایت قطع می‌کنند، مرکز آنی دوران ۱۲ نیز در بینهایت و دربالا یا پایین لغزنده قرار می‌گیرد، به‌روش نمایش این مطلب درشکل توجه کنید. بنابراین انتقال مستقیم‌الخط حالت خاصی از دوران است که درآن مرکز دوران در بینهایت است و شعاع دوران نیز طول بینهایت دارد. به‌طور خلاصه وقتی یك جسم باحرکت مستقیم‌الخط روی جسم دیگری می‌لغزد مرکزآنی‌دوران مشترك آنها در بینهایت و روی امتدادی‌که عمود بر امتداد لغزش است، قرار می‌گیرد.



شکل ۴.۴



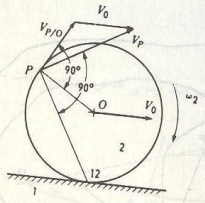
شکل ۳.۴

۶.۴ مرکز آنی دوران جسم درحال غلتش

اگر دیسك ۲ (شکل ۵.۴) بدون لغزش روی میلهٔ ۱ که می‌تواند ساکن یا متحرك باشد، بغلتد، نقطهٔ تماس ۱۲ مرکز آنی دوران اجسام ۱ و ۲ خواهد بود. یعنی نقطهٔ ۱۲، نقطه‌ای از جسم ۱ است‌که جسم ۲ درلحظهٔ موردنظر حول آن می‌چرخد، اگر جسم ۱ ساکن باشد و دیسك۲ درجهت گردش عقربه‌های ساعت بچرخد، سرعت مرکز O از دیسك فوق V_O خواهد بود. حرکت نقطهٔP نسبت به O به‌شکل دورانی و به‌شعاع PO خواهد بود وسرعت $V_{P/O}$ یعنی سرعتP نسبت به O نیز عمود برPO است. برای یافتن‌سرعت مطلق P باید سرعتهای V_O و $V_{P/O}$ را باهم جمع کنیم. یعنی

$$V_P = V_{P/O} \longrightarrow V_O$$

یادآوری می‌شودکه سرعت‌یك‌نقطه ازجسم درحال دوران‌دارای‌زاویهٔ ۹۰° نسبت به‌شعاع دوران است. بنابراین می‌توان خطی عمود بر V_P ازنقطهٔ P رسم‌کرد. این خط ازنقطهٔ



شکل ۵.۴

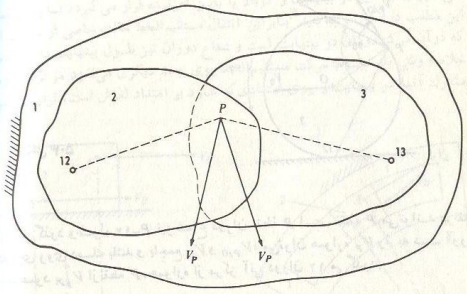
۱۲ می‌گذرد وطول ۱۲–P نیز شعاع دوران نقطهٔ P است. نقطهٔ P می‌تواند هرنقطهٔ دیگری روی دیسك باشد و باجمع V_O و $V_{P/O}$، می‌توان همواره V_P را به دست آورد. خط عمود بر V_P ازنقطهٔ P، همواره از مرکز آنی دوران ۱۲ می‌گذرد.

۷.۴ قضیهٔ کندی[1]

قضیهٔ کندی بیان می‌کندکه هر سه جسم دارای حرکت صفحه‌ای نسبت به‌یکدیگر، سه‌مرکز آنی دوران دارند، که این سه‌نقطه روی یك خط راست واقع می‌شوند. اثبات این نظریه به‌شیوهٔ زیر است. فرض‌کنید اجسام ۱، ۲ و ۳ درشکل ۶.۴ نسبت به یکدیگر حرکت نسبی دارند. برای سادگی می‌توان‌فرض‌کردکه یکی ازاین اجسام ساکن باشد. عضوساکن درشکل مذکور جسم۱ نامگذاری شده‌است. مراکزآنی دوران ۱۲ و ۱۳ نقاطی از جسم۱ هستندکه اجسام ۲ و ۳ به‌ترتیب درلحظهٔ موردنظر حول آنها می‌چرخند. نیازی نیست که سه جسم به‌یکدیگر متصل شده باشد. مرکز آنی ۲۳ برای اجسام ۲ و ۳ را باید تعیین‌کرد. فرض‌کنید این مرکز روی نقطهٔ P قرارگیرد. تنها حرکت جسم ۲ نسبت به‌جسم ۱ درلحظهٔ موردنظر چرخش حول مرکز آنی دوران مشترکشان یعنی ۱۲ است: حال وقتی‌که P نقطه‌ای از جسم ۲ فرض شود، سرعتP باید عمود برشعاع P–۱۲باشد. به‌همین‌ترتیب تنهاحرکت جسم۳ نسبت به‌جسم۱ درلحظهٔ فوق دوران حول شعاعP–۱۳ است. اما می‌دانیم مرکز آنی دوران نقطهٔ مشترکی از دو جسم است‌که دارای سرعت

1. Kennedy's Theorem

خطی یکسان هم در اندازه و هم در راستاست. چون امتداد دوسرعت V_P درشکل برهم منطبق نیست، نقطهٔ P نمی‌تواند مرکز آنی دوران ۲۳ باشد. واضح است فقط زمانی امتدادهای دو سرعت یکسان می‌شوند که مرکز آنی دوران ۲۳ روی خط ۱۳-۱۲ قرار



شکل ۶.۴

گیرد. محل دقیق ۲۳ روی خط ۱۳-۱۲ بستگی به‌امتداد و اندازهٔ سرعت زاویه‌ای‌اجسام ۲ و ۳ نسبت به‌جسم ۱ دارد.

۸.۴ مراکز آنی دوران برای مکانیسم تماس مستقیم

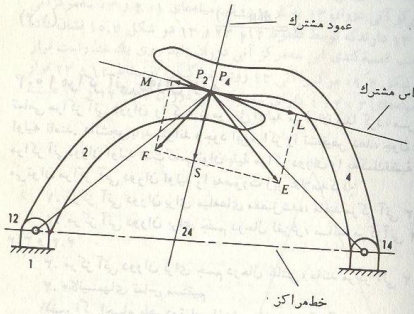
تماس لغزشی

درشکل ۷.۴، اجسام ۲ و ۴ دارای‌تماس مستقیم‌اند. P_2وP_4 درنقطهٔ تماس روی‌هم‌قرار دارند وسرعتهای آنها، P_2E و P_4F، به‌ترتیب عمود برP_2-۱۲ و P_4-۱۴ است. مؤلفهٔ عمودی این‌سرعتها P_2S وP_4Sاست‌که باید درتمامی لحظه‌ها باهم مساوی باشد تااجسام فوق درتماس با یکدیگر باقی بمانند. مؤلفهٔ مماسی سرعتهای P_2E و P_4F به‌ترتیب P_2L و P_4M است همان‌طور که در قسمت ۱۵.۲ توضیح داده شد، اگرنقطهٔ تماس روی خط مراکز ۱۴-۱۲ قرار نگیرد، این مؤلفه‌های مماسی مساوی نخواهند بود ولغزش خواهیم داشت. بنابراین تنها حرکت نسبی که اجسام ۲ و ۴ درنقطهٔ تماس خود می‌توانند

داشته باشند، درجهت مماس مشترك است ومرکز دوران نسبی‌آنها یعنی مرکز آنی‌دوران ۲۴ باید در امتداد عمود مشترك قرار گیرد. اما بنابرقضیهٔ کندی، مرکز آنی دوران ۲۴ باید در امتداد خط ۱۴-۱۲ واقع شود. پس مرکز آنی ۲۴ درنقطهٔ تلاقی عمود مشترك و خط مراکز ۱۴-۱۲ قرار دارد.

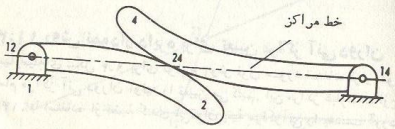
تماس غلتشی

همان‌گونه‌که دربخش ۱۵.۲ توضیح داده شد، فقط زمانی غلتش خواهیم داشت‌که سرعت



شکل ۷.۴

نقاط تماس P_2 و P_4 یکسان باشد. یعنی بایستی نقطهٔ تماس، به‌گونه‌ای‌که درشکل۸.۴ آمده است روی خط مراکز ۱۴-۱۲ قرارگیرد. چون مرکز آنی دوران نقطهٔ مشترکی از



شکل ۸.۴

دو جسم است که سرعت خطی یکسانی دارند، نتیجه می‌شود که وقتی اجسام ۲ و ۴ تماس غلتشی دارند مرکز آنی دوران مشترک آنها همان نقطهٔ تماس است.

۹.۴ تعداد مراکز آنی دوران یك مکانیسم

هر دو میلهٔ مفروض در یك مکانیسم نسبت به‌یکدیگر دارای حرکت‌اند پس یك مرکز آنی دوران مشترك دارند. بنابراین تعداد مراکز آنی دوران یك مکانیسم مساوی تمامی ترکیبهای ممکن از هر دو میله در کل میله‌های مکانیسم است. اگر n تعداد کل میله‌ها باشد درآن‌صورت تعداد مراکز آنی دوران برابر است با

$$N=\frac{n(n-1)}{2} \qquad (۱.۴)$$

۱۰.۴ مراکز آنی دوران اولیه

تمامی مراکز آنی دوران را که درمراحل اولیه می‌توان پیدا کرد، مراکز آنی دوران اولیه نامند. دانشجو باید بتواند وجود این‌مراکز را تشخیص دهد، چون پس‌ازتعیین کلیهٔ مراکز آنی‌دوران اولیه است که‌می‌توان بقیهٔ مراکز دوران را به‌کمك‌قضیهٔ کندی پیداکرد. می‌توان مراکز آنی دوران اولیه را به‌صورت زیر خلاصه‌کرد:

۱. مرکز آنی دوران برای میله‌های مفصل‌شده، مانند مرکز آنی ۲۳ درشکل۱.۴

۲. مرکز آنی دوران برای جسم درحال لغزش، مانند مرکزآنی ۱۲ در شکلهای ۳.۴ و ۴.۴

۳. مرکز آنی دوران برای جسم درحال غلتش، مانند مرکز آنی ۱۲ درشکل۵.۴

۴. مکانیسمهای تماس مستقیم

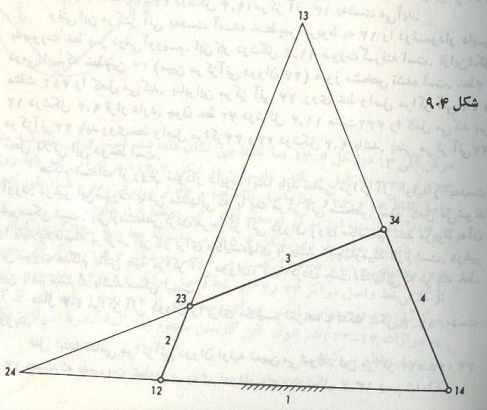
الف. اگر اجسام باهم درتماس لغزشی باشند، مرکز آنی دوران آنها درمحل‌تلاقی عمود مشترك‌گذرا ازنقطهٔ تماس وخط‌مراکز قرار می‌گیرد؛ مانند مرکز آنی ۲۴ درشکل ۷.۴

ب. اگر اجسام باهم درتماس غلتشی باشند، مراکز آنی دوران آنها درمحل نقطهٔ تماس خواهد بود؛ مانند مرکز آنی ۲۴ درشکل ۸.۴

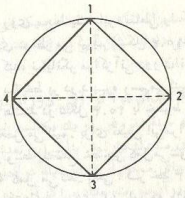
۱۱.۴ روش نمودار دایره برای تعیین مراکز آنی دوران

چهارمیله‌ای شکل ۹.۴ برای توضیح روش فوق مورد استفاده قرار خواهدگرفت. ابتدا تمام مراکز آنی دوران اولیه را تعیین می‌کنیم. این مراکز عبارت‌اند از: ۱۲، ۲۳، ۳۴ و ۱۴. با استفاده از قضیهٔ کندی می‌توان بقیهٔ مراکزآنی را به‌دست آورد. روش ساده‌ای

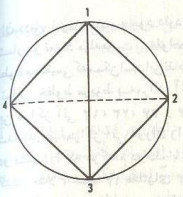
به‌عنوان روش نمودار دایره وجود دارد. در این روش روی محیط یك دایره نقاطی را که مبین شماره و تعداد میله‌هاست، به‌فواصل تقریباً مساوی درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰.۴). تمام‌خطوط‌مستقیمی که‌ممکن‌است‌این‌نقاطرا به‌هم‌متصل کند، نمایانگر مراکزآنی دوران‌اند. ابتدا تمامی خطوط مربوط به‌مراکز آنی معلوم را با خط پر در دایره رسم می‌کنیم. بنابراین مراکز آنی ۱۲، ۲۳، ۳۴ و ۱۴ که معلوم هستند در شکل ۱۰.۴ با خطوط پر رسم شده‌اند. بقیهٔ‌مراکز آنی دوران را باخط‌چین مشخص می‌کنیم. برای تعیین این‌مراکز باید دو مثلث را که هرکدام دوضلع باخط پر دارند وتوسط یك‌ضلع خط‌چین کامل‌می‌شوند پیدا کنیم. مثلاً، خط ۱۳ مثلثهای ۱۲۳ و ۳۴۱ را کامل می‌کند. یعنی اگر خط ۱۳، خط پر بود این دو مثلث کامل می‌شدند (از خطوط پر تشکیل می‌شدند). این دو مثلث برای یافتن محل مرکز آنی دوران ۱۳ به‌کار می‌روند. میله‌های ۱، ۲ و ۳، سه‌مرکزآنی دوران ۱۲، ۲۳ و ۱۳ دارندکه توسط خطوط ۱۲، ۲۳ و ۱۳ در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده است. به موجب قضیهٔ کندی این سه‌مرکز آنی دوران باید روی یك خط راست قرار گیرند. بنابراین درشکل ۹.۴، مرکز آنی ۱۳ روی خط‌گذرا ازنقاط ۱۲ و ۲۳ قرار می‌گیرد. همچنین میله‌های ۳، ۴ و ۱ دارای سه‌مرکز آنی دوران ۳۴، ۱۴ و ۱۳ هستند



شکل ۹.۴



شکل ۱۰.۴



شکل ۱۱.۴

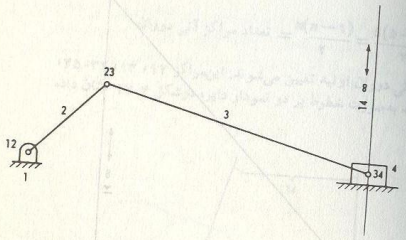
واین مراکز نیز توسط سه‌خط ۳۴، ۱۴ و ۱۳ در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده‌اند. قضیهٔ کندی بیان می‌کندکه این سه‌مرکز آنی دوران روی یك خطراست قرار دارند. پس در شکل ۹.۴، مرکز آنی دوران ۱۳ باید روی خط واصل نقاط ۳۴ و ۱۴ قرار گیرد. چون قبلاً گفته شدکه مرکز آنی ۱۳ روی خط واصل ۲۳-۱۲ قرار دارد. بنابراین از تلاقی خط ۲۳-۱۲ با خط ۱۴-۳۴ درشکل ۹.۴، مرکز آنی ۱۳ به‌دست می‌آید.

وقتی این مرکز آنی به‌دست آمد، خط‌چین مربوط به ۱۳ را درنمودار دایره به‌صورت خط پر درمی‌آوریم. این کار درشکل ۱۱.۴ صورت گرفته است. ازاین‌شکل درمی‌یابیم که خط‌چین ۲۴ (مبین مرکزآنی دوران ۲۴) هنوز مشخص نشده است. خط۲۴ مثلث ۴۱۲ را کامل می‌کند. بنابراین مرکز آنی ۲۴ روی خط واصل مراکز آنی ۴۱ و ۱۲ درشکل ۹.۴ قرار دارد. چون خط ۴۲ درشکل ۱۱.۴ مثلث۴۳۲ را کامل می‌کند پس مرکزآنی۲۴ باید روی‌خط واصل مراکز۳۴ و۲۳ درشکل ۹.۴ باشد. یعنی مرکز آنی۲۴ محل تلاقی این دوخط است.

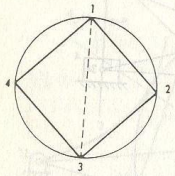
هنگام استفاده از روش نمودار دایره، ابتدا باید تمامی مراکز آنی اولیه را به‌دست آورد. درغیر این‌صورت یافتن مثلثهایی که با یك مرکز آنی مشخص نشده کامل می‌شوند غیرممکن است. پس‌ازمشخص‌کردن هر مرکز آنی دوران روی مکانیسم، خط مربوط به‌آن را باید بلافاصله پرکرد. این کار برای مکانیسمهای با بیشتر ازچهارمیله لازم است. درغیر این‌صورت هنگام یافتن بقیهٔ مراکز آنی دوران، پیدا کردن جفت مثلثهایی که در یك خط‌چین باهم مشترك باشند ممکن نیست.

مثال ۱۰.۴ مراکز آنی دوران را برای مکانیسم لغزنده ـ لنگ شکل ۱۲.۴ به‌دست آورید.

حل ابتدا تمامی مراکزآنی دوران اولیه تعیین می‌شوند. این مراکز ۱۲، ۲۳، ۳۴ و ۱۴ هستندکه به‌صورت خطوط پر روی نمودار دایره درشکل ۱۳.۴ رسم شده‌اند.

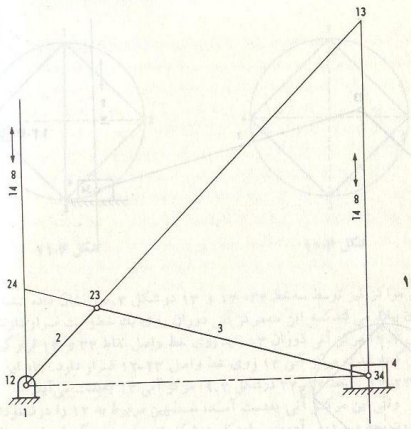


شکل ۱۲.۴

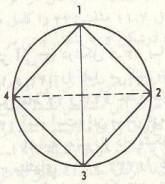


مرکز آنی ۱۳ درشکل ۱۳.۴ با خط‌چین نشان داده شده است و می‌بینیم که مثلثهای ۱۲۳ و ۱۴۳ را کامل می‌کند. بنابراین در شکل ۱۲.۴، مرکز آنی ۱۳ باید روی خط واصل نقاط ۱۲ و ۲۳ و خط واصل نقاط ۱۴ و ۳۴ قرار گیرد. یعنی، همان‌طورکه‌درشکل ۱۴.۴ آمده است، این مرکز درمحل تلاقی این دوخط قرار دارد.

باتوجه به‌نمودار دایره‌شکل ۱۵.۴، می‌بینیم که خط‌چین نمایانگر مرکزآنی‌دوران ۲۴، مثلثهای ۴۱۲ و ۴۳۲ را کامل می‌کند پس درشکل ۱۴.۴، مرکز آنی دوران ۲۴ از تلاقی‌خط واصل مراکز ۲۳ و۳۴ و خط واصل مراکز ۱۲ و ۱۴ به‌دست می‌آید. چون مرکزآنی ۱۴ در بینهایت است، برای رسم خطی از ۱۲ به ۱۴ باید ازمرکز ۱۲ خطی به موازات ۱۴-۴۳ رسم شود. این کاربدین مفهوم است‌که خطوط موازی یکدیگر را دربینهایت‌قطع می‌کنند.



شکل ۱۴.۴



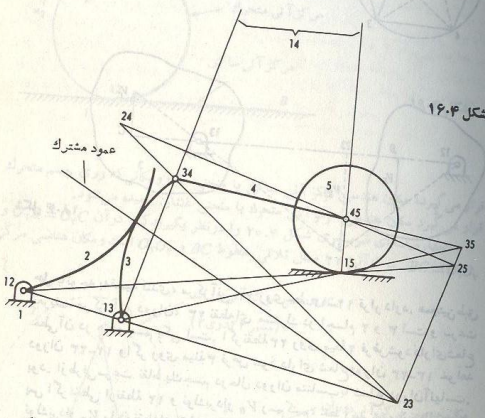
شکل ۱۵.۴

مثال ۳.۴ درشکل ۱۶.۴، میلهٔ۵ چرخی است که روی میلهٔ ۱ می‌غلتد. تمام‌مراکز آنی دوران مکانیسم فوق را به‌دست آورید.

حل تعداد مراکز آنی دوران از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{تعداد مراکز آنی دوران} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$

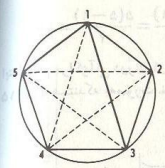
ابتدا تمام مراکزآنی دوران اولیه تعیین می‌شوند. این‌مراکز ۱۲، ۱۳، ۳۴، ۴۵، ۱۵ و ۲۳ هستندکه به‌صورت خطوط پر در نمودار دایره درشکل ۱۷.۴ نشان داده



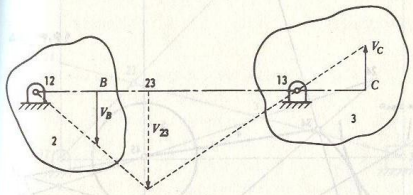
شکل ۱۶.۴

شده‌اند. بقیهٔ مراکزآنی دوران به‌وسیلهٔ خط‌چین درنمودار رسم‌شده‌اند. چون مرکز آنی دوران ۱۴، مثلثهای ۱۳۴ و ۱۵۴ را کامل می‌کند، ابتدا این مرکز را تعیین می‌کنیم. بعدازآنکه‌این‌مرکز درشکل۱۶.۴تعیین‌شد، درشکل۱۷.۴آن رابه‌صورت خط پر درمی‌آوریم. سپس استفاده از نمودار دایره را برای تعیین دیگر مراکز آنی دوران ادامه می‌دهیم.

مثال ۴.۴ اجسام ۲ و ۳ (شکل ۱۸.۴) حول محورهای ۱۲ و ۱۳ متصل به زمین می‌چرخند. B و C به‌ترتیب نقاطی در اجسام ۲و۳ هستندکه سرعت‌آنها داده‌شده است. مرکز آنی دوران ۲۳ را به‌دست آورید.



شکل ۱۷۰۴



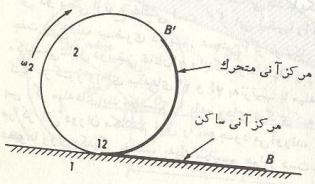
شکل ۱۸۰۴

حل باتوجه به‌قضیهٔ کندی، مرکزآنی ۲۳ روی‌خط ۱۳–۱۲ قرار دارد. همچنین‌طبق تعریف مرکز آنی دوران، ۲۳ نقطه‌ای مشترك در اجسام ۲ و ۳ است و سرعت خطی‌آن در هردوجسم یکی است. اگرنقطهٔ۲۳ روی میلهٔ۲ فرض‌شوددارای‌شعاع دوران ۲۳–۱۲ واگر روی میلهٔ۳ فرض شود دارای شعاع‌دوران ۲۳–۱۳ خواهد بود. ازطرفی‌سرعت نقاط یك‌جسم درحال دوران متناسب‌با شعاع دوران‌آنهاست. پس اگر خطی ازنقطهٔ ۱۲ و نوك‌بردار V_B رسم‌کنیم، خط رسم شده ازنقطهٔ ۱۳ و نوك‌بردار V_C را درنقطه‌ای قطع‌می‌کندکه مبین‌اندازهٔ V_{23} است. با یافتن‌آن،مرکز آنی دوران ۲۳ نیزکه روی خط ۱۳–۱۲ است، به‌دست می‌آید.

۱۲.۴ مکان هندسی مراکزآنی دوران

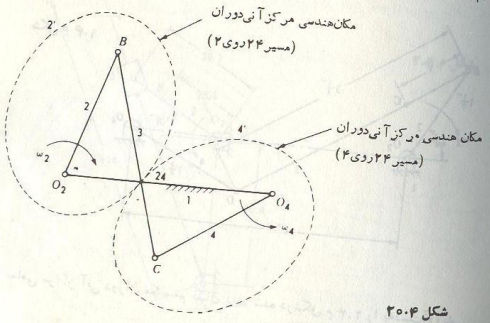
دیدیم بعضی از مراکـز آنی دوران روی زمین ثابت نگه داشته می‌شونـد. ولی موقعیت دیگر مراکز وقتی‌که مکانیسم از فـازهای مختلف حرکت خـود می‌گذرد، به‌طـور پیوسته تغییر می‌کند. مسیر یك مرکزآنی متحرك را می‌توان رسم‌کرد. منحنی هموارویکنواختی که از این نقاط می‌گذرد مکان هندسی مرکزآنی دوران نامیده می‌شود.

درشکل ۱۹۰۴، فرض‌کنید دیسك ۲ روی جسم ۱ می‌غلتد، مرکز آنی ۱۲ همواره درنقطهٔ تماس واقع است. خطراست B–۱۲، مکان هندسی مرکز آنی ۱۲ روی جسم ۱ و دایره B'–۱۲ مکان هندسی مرکز آنی ۱۲ روی جسم ۲ است. مکانی‌که روی جسم ساکن قرار می‌گیرد، مکان هندسی مرکز آنی ساکن یا منحنی پایه ومکانی‌که روی جسم متحرك قرار می‌گیرد مکان هندسی مرکز آنی متحرك یا منحنی غلتان نامیده می‌شود.



شکل ۱۹۰۴

چهارمیله‌ای ضربـدری شکل ۲۰۰۴ را درنظر بگیریدکـه درآن $O_2B=O_4C$ و $BC=O_2O_4$. مرکزآنی ۲۴ محل تلاقی خطوط BC و O_2O_4 است ومکان هندسی مرکز



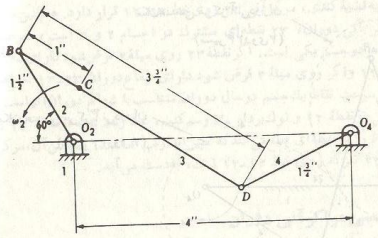
شکل ۲۰۰۴

آنی که روی زمین به‌وجود می‌آورد، خط O_2O_4 است. مکانی که مرکز آنی ۲۴ روی میلهٔ ۴ ایجاد می‌کند یك بیضی است و مکان به‌وجودآمده توسط همان مرکز آنی روی میلهٔ ۴ نیز بیضی است. وقتی میله‌های ۲ و ۴ چهارمیله‌ای می‌چرخند، این بیضیها نیز همواره در مرکز آنی ۲۴ که روی خط O_2O_4 حرکت می‌کند با یکدیگر مماس هستند. بنابراین تماس این دو بیضی از نوع غلتشی است. اگر این بیضیها را دندانه‌دار کنیم، در آن صورت یك جفت چرخ‌دنده بیضوی داریم. همچنین اگر در شکل ۲۰.۴، چهارمیله‌ای اصلی را با مکانیسمی شامل دو بیضی غلتان ′۲ و ′۴ که در نقاط O_2 و O_4 به زمین مفصل شده‌اند جایگزین کنیم حرکت زاویه‌ای میله‌های ′۲ و ′۴ به‌ترتیب با میله‌های ۲ و ۴ یکسان خواهد بود. پس اگر میله‌های یك مکانیسم را با عضوهای دیگری که محیط خارجی آنها مکان هندسی مراکز آنی دوران مکانیسم فوق را به‌وجود می‌آورند، جایگزین کنیم به گونه‌ای که این عضوها روی یکدیگر بغلتند، به یك مکانیسم هم‌ارز دست می‌یابیم.

مسائل

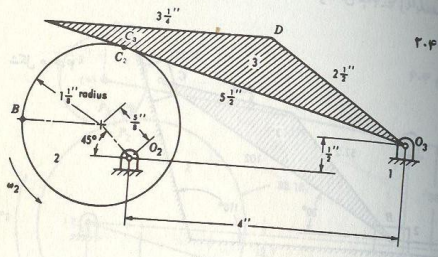
۱۰۴ تمامی مراکز آنی دوران مکانیسم نشان داده شده در شکل م ۱.۴ را به‌دست آورید.

شکل م ۱۰۴



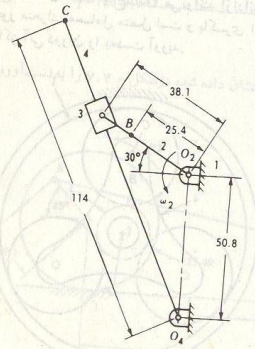
✓ **۲.۴** تمامی مراکز آنی دوران مکانیسم نشان داده شده در شکل م ۲.۴ را به‌دست آورید.

شکل م ۲۰۴

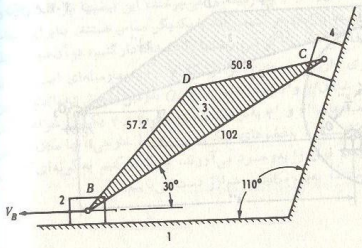


۳.۴ تمامی مراکز آنی دوران مکانیسم نشان داده شده در شکل م ۳.۴ را به‌دست آورید.

شکل م ۳۰۴

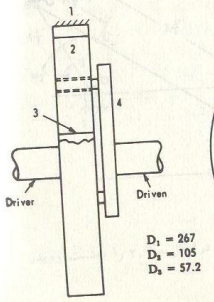


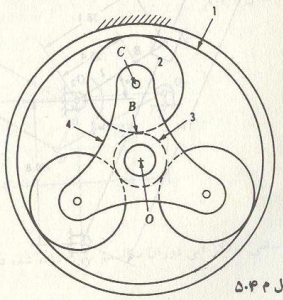
۴.۴ تمامی مراکز آنی دوران مکانیسم نشان داده شده درشکل م ۴.۴ را به‌دست‌آورید.



شکل م ۴.۴

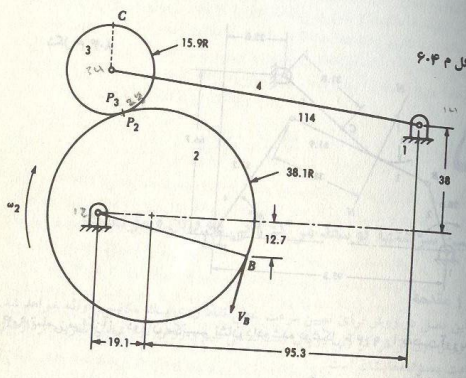
۵.۴ شکل م ۵.۴، یك زنجیر چرخ‌دندهٔ خورشیدی را نشان می‌دهد. چرخ‌دندهٔ ۳ به‌محور محرك متصل است و باعث غلتش چرخ‌دندهٔ ۲ در داخل چرخ‌دندهٔ ساکن ۱ می‌شود. چرخ‌دنده‌های مشابه چرخ‌دندهٔ ۲ می‌توانند آزادانه حول محور متصل به‌حامل ۴ بچرخند. محور متحرك به‌حامل متصل است و باکسری ازسرعت محور محرك می‌چرخد. تمامی مراکز آنی دوران را به‌دست آورید.





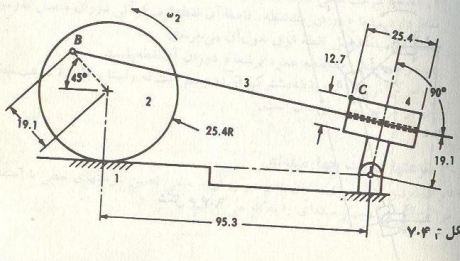
شکل م ۵.۴

۶.۴ تمامی مراکزآنی دوران مکانیسم نشان داده شده درشکل م ۶.۴ را به‌دست‌آورید.



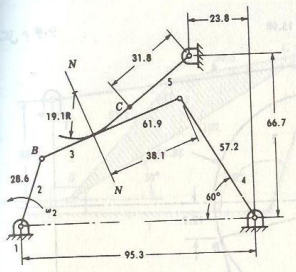
شکل م ۶.۴

۷.۴ تمامی مراکزآنی دوران مکانیسم نشان داده شده درشکل م ۷.۴ را به‌دست‌آورید.



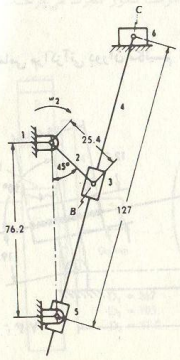
شکل م ۷.۴

✓ ۸.۴ تمامی مراکزآنی دوران مکانیسم نشان داده شده درشکل م ۸.۴ را به‌دست‌آورید.



شکل م ۸.۴

۹.۴ تمامی مراکزآنی دوران مکانیسم نشان داده شده درشکل م ۹.۴ را به‌دست‌آورید.



شکل م ۹.۴

۵

تعیین سرعتها توسط مرکز آنی دوران ومؤلفه‌ها

۱.۵ مقدمه

دراین فصل دو روش برای تعیین سرعت خطی نقاط روی یک مکانیسم ارائه خواهد شد. در روش اول از مراکز آنی دوران استفاده می‌کنیم و روش دوم شامل تجزیهٔ بردارهای سرعت به‌مؤلفه‌هایشان است.

۲.۵ تعیین سرعت خطی توسط مراکز آنی دوران

هنگام یافتن سرعت خطی به‌روش مراکزآنی دوران باید اصول زیر را به‌خاطر سپرد:

۱. اندازهٔ سرعت خطی نقاط جسم درحال دوران نسبت مستقیم با شعاع دوران‌آن نقاط دارد. شعاع دوران یک‌نقطه، فاصلهٔ‌آن نقطه‌ازمرکزآنی دوران متصل به‌زمین است که میلهٔ شامل نقطهٔ فوق حول‌آن می‌چرخد.

۲. سرعت خطی یک‌نقطه عمود برشعاع دوران آن‌نقطه است.

۳. مرکزآنی دوران، نقطه‌مشترکی از دوجسم است که راستا و اندازهٔ سرعت‌خطی آن در هر دو جسم یکسان است.

۳.۵ سرعتها دریک چهارمیله‌ای

به‌عنوان اولین مثال برای نشان‌دادن دو روش ترسیمی تعیین سرعتهای خطی با استفاده از مراکز آنی، یک‌چهار میله‌ای را به‌کار می‌گیریم.