۶

تعیین سرعت درمکانیسمها به‌روش سرعتهای نسبی

۱.۶ مقدمه

درفصل پیش، تحلیل سرعت مکانیسمها توسط روشهای مراکزآنی دوران ومؤلفه‌ها توضیح داده شد. روش سوم که استفاده از مفاهیم سرعت نسبی است و درفصل ۲ به‌آن اشاره شد در این فصل مورد بحث قرار می گیرد. این روش اهمیت بیشتری دارد زیرا برای تحلیل شتاب دریك مکانیسم باید نخست سرعتهای نسبی تعیین شود.

۲.۶ سرعتهای خطی

برای بیان روش سرعت نسبی درتعیین‌سرعت دریك مکانیسم، ابتدا مکانیسم لغزنده ـ لنگ شکل ۱.۶ را درنظرمی گیریم. فرض کنید که‌سرعت‌زاویه‌ای لنگ $\omega_۲ = ۱۵\,\mathrm{rad/s\,ccw}$ است ومی‌خواهیم سرعت پیستون V_C را به‌دست‌آوریم.

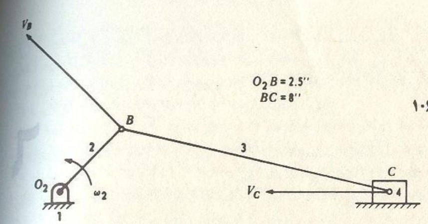
V_B عمود بر $O_۲B$ است. پس داریم

$$V_B = (O_۲B)\omega_۲ = ۲٫۵ \times ۱۵ = ۳۷٫۵\ \mathrm{in/s}$$

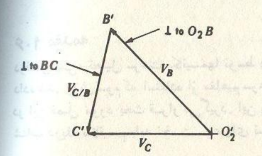
با استفاده ازمعادلهٔ سرعت نسبی که درقسمت ۹.۲ آمده است، خواهیم داشت:

$$\bar{V}_C = V_B \longrightarrow \bar{V}_{C/B} \qquad (۱.۶)$$

هرکمیت دریك معادلهٔ برداری دارای اندازه و راستاست و برای مشخص کردن این که کدام کمیت‌معلوم و کدامیك مجهول است. می‌توان دو علامت دربالای هر بردار قرارداد. درصورت وجود مجهول ازخط فاصله (—) و درصورت وجود معلوم از علامت تیك ( )



شکل ۱.۶



شکل ۲.۶

1 in. = 18 in/s

استفاده می‌شود. اولین علامت را برای اندازه و دومی را برای راستای بردار منظور می‌کنیم. اندازهٔ V_C مجهول ولی جهت آن معلوم است زیرا پیستون توسط سطح راهنمای متصل به‌زمین مقید شده است و به‌صورت افقی حرکت می‌کند. بنابراین یك خط فاصله و متعاقب آن علامت تیك بالای V_C قراردارد. چون هم اندازه وهم راستای بردار V_B معلوم است، پس دوعلامت تیك دربالای آن گذاشته شده است. از آنجا که میلهٔ ۳ صلب فرض می‌شود، بنابراین C سرعتی نسبت به B در امتداد خط CB ندارد. درنتیجه هرگاه C نسبت به B سرعت داشته باشد، باید راستای آن عمود برخط BC باشد. پس درمعادلهٔ (۱.۶)، بالای $V_{C/B}$ خط فاصله گذاشته شده تا معرف مجهول بودن اندازهٔ آن باشد وعلامت تیك معلوم بودن جهت آن را نشان می‌دهد. با بررسی این نوع علائم در معادلهٔ فوق درمی‌یابیم که فقط دو مجهول داریم که یکی اندازهٔ V_C و دیگری اندازهٔ $V_{C/B}$ است. معادلهٔ برداری فقط درحالتی که بیشتر از دو مجهول نداشته باشیم قابل حل است.

چندضلعی سرعت درشکل ۲.۶ نشان داده شده است. نقطهٔ O'_2 قطب است وسرعتهای

مطلق تمامی نقاط موردنظر، از این نقطه رسم می‌شوند. قطب معرف تمام نقاط مکانیسم است که سرعت صفر دارند. درچندضلعی سرعتها، نقاط معادل درشکل ۱.۶ باعلامت پریم (') مشخص شده‌اند. بنابراین O'_2 معرف نقطهٔ O_2 روی مکانیسم بوده وچون سرعت نقطهٔ O_2 صفر است، O'_2 درقطب قرار می گیرد. O'_2B' و O'_2C' به‌ترتیب معرف سرعتهای نقاط B و C هستند. درشکل اصلی ۲.۶، مقیاس $1in = 18in/s$ به کار رفته است. سرعت قطب O'_2 در هرمکانی از کاغذ می‌تواند درنظر گرفته شود. V_B ازقطب رسم شده و عمود بر O_2B است. طبق معادلهٔ (۱.۶)، $V_{C/B}$ باید با V_B جمع شود. چون راستای $V_{C/B}$ معلوم وعمود بر BC است، پس خط $B'C'$ در راستای فوق رسم می‌شود. طول آن هنوز مجهول است. خط O_2C' به‌موازات جهت حرکت لغزنده کشیده می‌شود. اندازه‌های V_C و $V_{C/B}$ از تلاقی خطوط O'_2C' و $B'C'$ به‌دست می‌آیند. طول O_2C' ازشکل اصلی اندازه گرفته شده وبرابر $1/80in$ است. اکنون باضرب کردن آن درمقیاس سرعت، خواهیم داشت

$$V_C = 1/80 \times 18 = 32/4in/s$$

میله‌بندی شکل ۳.۶ را به‌عنوان مثال دیگری در مورد روش سرعت نسبی در نظر بگیرید. سرعت زاویه‌ای لنگ محرك $\omega_2 = 20rad/s\,cw$ است وباید سرعت نقطهٔ D را تعیین کنیم.

سرعت نقطهٔ B برابر است با

$$V_B = (O_2B)\omega_2 = 0/152 \times 20 = 3/04m/s$$

که درشکل ۴.۶ به‌وسیلهٔ بردار O'_2B'، رسم شده ازقطب سرعت O'_2، ارائه شده است. با استفاده از روش سرعتهای نسبی داریم

$$\bar{V}_D = V_B \longrightarrow \bar{V}_{D/B} \qquad (۲.۶)$$

اندازه و راستای بردار V_D مجهول است. اندازهٔ $V_{D/B}$ مجهول است ولی راستای آن معلوم وعمود بر BD است. چون معادلهٔ (۲.۶) بیشتر از دو مجهول دارد، بنابراین نمی‌توان آن را حل کرد. با این‌وجود V_D را می‌توانیم با یافتن سرعت نقطهٔ C به‌دست آوریم. برای V_C می‌توان نوشت:

۱۱۷

$$\bar{V}_C = V_B \longrightarrow \bar{V}_{C/B} \qquad (۳.۶)$$

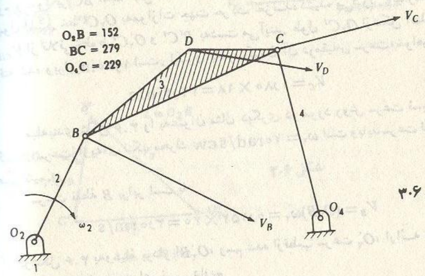
که دو مجهول دارد و قابل حل است. اندازه‌های V_C و $V_{C/B}$ مجهولهای معادله‌اند. نقطهٔ C' درشکل ۴.۶ به‌صورت زیرتعیین می‌شود. خط $B'C'$ از B' عمود بر BC رسم شده که معرف راستای $V_{C/B}$ است. خطی از O_4 عمود بر O_4C رسم می‌شود که معرف راستای V_C است. محل تلاقی این دو خط نقطهٔ C' را مشخص می‌کند. $V_{C/B}$ به‌وسیلهٔ

خط $B'C'$ بیان می‌شود و راستای آن از B' به C' امتداد دارد.
حال برای V_D داریم.

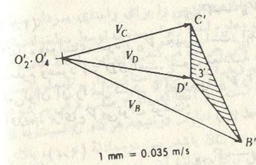
$$\bar{V}_D = V_C \longrightarrow \bar{V}_{D/C}$$

معادلهٔ فوق بیش‌از دو مجهول دارد و از روی آن نمی‌توان V_D را به‌دست آورد. اما چون طرف راست این معادله با معادلهٔ (۲.۶)، هر دو برابر V_D هستند پس داریم

$$V_B \longrightarrow \bar{V}_{D/B} = V_C \longrightarrow \bar{V}_{D/C}$$



شکل ۳.۶



شکل ۴.۶

معادلهٔ اخیر فقط دو مجهول دارد و قابل حل است. خط رسم‌شده از B' درجهت $V_{D/B}$ است ومحل تلاقی آن با خط رسم‌شده از C' وعمود بر BD وعمود بر CD، نقطهٔ D'را تعیین می کند. ازآنجا، V_D با جمع کردن V_B و V_C به‌ترتیب با $V_{D/B}$ و $V_{D/C}$ به‌دست

آمده است. ازمقدار اندازه‌گرفته شده درشکل اصلی ۴.۶، با توجه به‌مقیاس به‌کار رفته، خواهیم داشت: $V_D = $ ۱٫۹۸m/s و $V_C = $ ۲٫۰۱m/s

بارسم‌خطی ازقطب به‌نقطه‌ای ازچندضلعی سرعت، سرعت مطلق آن نقطه درمکانیسم تعیین می‌شود. خطی که هر دونقطه از چندضلعی سرعت را به‌یکدیگر متصل کند، سرعت نسبی آن دونقطه را نسبت به‌یکدیگر روی مکانیسم تعیین می کند. در شکلهای ۳.۶ و ۴.۶ برداری که از C' به D' رسم شود، معرف سرعت D نسبت به C است، و اگر بردار از D' به C' رسم شود، سرعت C نسبت به D به‌دست می‌آید.

۳.۶ تصویر سرعت

هر میله دریك مکانیسم تصویری در چندضلعی سرعت دارد. درشکل ۴.۶، خطوط $B'C'$، $C'D'$ و $B'D'$ به‌ترتیب عمود بر خطوط BC و CD و BD درشکل ۳.۶ رسم‌شده‌اند. بنابراین‌مثلث $B'C'D'$ بامثلث BCD متشابه است وتصویرآن خوانده می‌شود. همین‌طور O'_2B' تصویر O_2B و O'_4C' تصویر O_4C است. تصویر سرعت مفهوم مفیدی است. اگر سرعتهای هر دونقطه روی یك‌میله در چندضلعی سرعت معلوم باشد، می‌توان سرعت‌نقطهٔ سوم روی میله را با رسم تصویر سرعت به‌راحتی به‌دست‌آورد. مثلاً درشکل ۴.۶، اگر نقاط B' و C' معین باشند، نقطهٔ D' را می‌توان با تشکیل مثلث $B'C'D'$ متشابه با مثلث BCD، به‌دست آورد. لازمهٔ آن عمود بودن $B'C'$، $B'D'$ و $C'D'$ به‌ترتیب بر BC، BD و CD است.

۴.۶ سرعتهای زاویه‌ای

سرعت زاویه‌ای یك‌میلهٔ صلب مساوی سرعت نسبی هر دونقطهٔ روی آن تقسیم برفاصلهٔ بین دو نقطه است. چون فاصلهٔ بین نقاط جسم صلب ثابت باقی می‌ماند، بنابراین سرعت يك‌نقطه نسبت به‌نقطهٔ دیگرهمان میله الزاماً باید عمود برخط اتصال دونقطه باشد، یعنی حرکت يك نقطه نسبت به‌نقطهٔ دیگر، يك دوران است که شعاعی برابر فاصلهٔ بین نقاط دارد. مثلاً درشکل ۳.۶، سرعت زاویه‌ای میلهٔ ۳ برابر است با

$$\omega_3 = \frac{V}{R}$$

$$= \frac{V_{B/C}}{BC} = \frac{V_{B/D}}{BD} = \frac{V_{C/D}}{CD} \text{ccw}$$

درشکل ۴.۶، سرعت نسبی $V_{B/C}$ از C' به B' امتداد دارد. در شکل ۳.۶، B درحال حرکت به‌طرف پایین نسبت به C بوده و بنابراین دارای دورانی درخلاف جهت گردش

عقربه‌های ساعت حول C است. پس ω_3 در خلاف‌جهت گردش عقربه‌های ساعت خواهد بود. به‌طریق مشابه جهتهای $V_{B/D}$ و $V_{C/D}$ در چندضلعی سرعت دلالت براین دارند که B در خلاف‌جهت گردش عقربه‌های ساعت حول D، و C نیز در همان جهت حول D می‌چرخد. همچنین ازمعادلهٔ آخر متوجه می‌شویم کـه تمام خطوط راست در جسم دارای سرعت زاویه‌ای مشابه‌اند.

مثال ۱۰۶ در مکانیسم شکل ۵.۶، فرض کنید $\omega_2 = 5\,\text{rad/s cw}$، وسرعت نقطهٔ

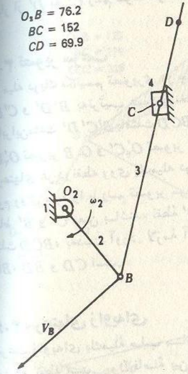
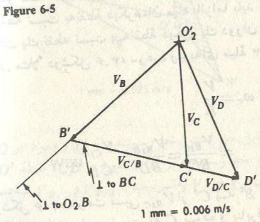


Figure 6-5

شکل ۵.۶



شکل ۶.۶

D وسرعت زاویه‌ای میلهٔ ۳ مجهول است. V_B امتدادی عمود بر O_2B دارد.

$$V_B = (O_2B)\omega_2$$

پس

$$= 0.0762 \times 5 = 0.381\,\text{m/s}$$

چندضلعی سرعت درشکل ۶.۶ رسم شده است که درآن O'_2B' معرف V_B با مقیاس مورد نظر است. مقیاس بـه‌کار رفته $1\,\text{mm} = 0.006\,\text{m/s}$ است. معادلهٔ سرعت نسبی به‌صورت زیر است.

$$\bar{V}_D = V_B \longrightarrow \bar{V}_{D/B} \qquad (۴.۶)$$

اندازه و راستای‌سرعت D مجهول است. بنابراین در معادلهٔ برداری روی V_D دو خط فاصله گذاشته شده‌است. درحالی که علامتهای‌تیك روی V_B دلالت براین‌دارند که اندازه و راستای بردار اخیر معلوم است. اگرچـه اندازهٔ $V_{D/B}$ مجهول است، راستای آن معلوم و عمود بـر BD است. بنابراین از علامت تیك برای مشخص کردن این دانسته استفاده شده است. درمی‌یابیم که در معادلـه سه‌مجهول وجود دارد، اندازه و راستای V_D و انـدازهٔ $V_{D/B}$. ابتدا O'_2B'، که معرف V_B است، را از قطب O'_2 رسم می کنیم.

برای یافتن V_D درشکل ۶.۶ باتوجه به‌معادلهٔ (۴.۶)، باید بردارهای V_B و $V_{D/B}$ را باهم جمع کنیم. خط $B'D'$ معرف $V_{D/B}$ و O'_2D' معرف V_D است. چون اندازهٔ $V_{D/B}$ و راستا و اندازهٔ V_D معلوم نیست، بنابراین هنوز نمی‌تـوان D' را تعیین کرد. اما می‌توان ابتدا V_C را ازمعادلهٔ سرعت نسبی زیر به‌دست آورد

$$\bar{V}_C = V_B \longrightarrow \bar{V}_{C/B} \qquad (۵.۶)$$

طبق معادلهٔ (۵.۶) باید V_B را به $V_{C/B}$ افزود. $B'C'$ همان $V_{C/B}$ است که از نقطهٔ B' رسم شده و طـول آن هنوز مجهول است. V_C سرعت مطـلق است و بنابراین باید ازقطب O'_2 رسم شود. همچنین چون C نقطه‌ای مشترك روی میله‌های ۳ و ۴ است به‌حرکت در جهت موازی راهنما، کـه میلهٔ ۴ روی آن می‌لغزد، مقید است. بنابراین‌خط O'_2C' راستای V_C را نشان می‌دهد. محل‌تلاقی این خط با خط $B'C'$، نقطهٔ C' را تعیین می کند. حال قادر خواهیم بودکه از معادلهٔ برداری اصلی برای تعیین V_D استفاده کنیم

$$\bar{V}_D = V_B \longrightarrow V_{D/B}$$

اندازهٔ $V_{D/B}$ از روش‌تناسب به‌دست‌می‌آید. $BC=۱۵۲\,\mathrm{mm}$ و $BD=۲۲۲\,\mathrm{mm}$، بنابراین

$$BD=\frac{۲۲۲}{۱۵۲}BC=۱٫۴۶BC$$

چون نقاط B، C و D متعلق به‌یك میله هستند بنابراین B'، C' و D' نیز درچند ضلعی سرعت باید تصویری معادل BCD در مکانیسم داشته باشند. یعنی داریم

$$B'D'=۱٫۴۶B'C'$$

نقطهٔ D' با رسم $B'D'$، که ۱٫۴۶ برابر طول $B'C'$ است، به‌دست می‌آید. بردار O'_2D' بیانگر سرعت نقطهٔ D، و $B'D'$ بیانگر $V_{D/B}$ است. با درنظر گرفتن مقیاس به‌کاررفته‌درچندضلعی، خواهیم‌داشت: $V_D=۰٫۳۸۷\,\mathrm{m/s}$ و $V_{D/B}=۰٫۴۵۷\,\mathrm{m/s}$ سرعت زاویه‌ای میلهٔ ۳ برابر است با

$$\omega_3=\frac{V_{C/B}}{BC}=\frac{V_{D/B}}{BD}$$

با جایگزینی مقدار به‌دست آمده از رابطه بالا، داریم.

$$\omega_3=\frac{۰٫۴۵۷}{۰٫۲۲۲}=۲٫۰۶\ \mathrm{rad/s\ cw}$$

۵.۶ سرعت نقاط روی جسم درحال غلتش

درشکل ۷.۶، دیسك ۲ روی جسم ۱ می‌غلتد. همان گونه که در قسمت ۶.۴ توضیح داده شد جسم ۲ حول نقطهٔ P در میلهٔ ۱ در لحظهٔ فوق دوران می کند. مرکز دیسك سرعتی معادل‌زیر خواهد داشت.

$$V_C=R\omega$$

که R شعاع و ω سرعت زاویه‌ای دیسك است. هرنقطهٔ دیگر دیسك مانند Q سرعتی‌نسبت به C خواهد داشت که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$V_{Q/C}=(CQ)\omega$$

چون حرکت Q نسبت به C درواقع دورانی حول C است، بنابراین بردار $V_{Q/C}$ باید بر شعاع دوران CQ عمود باشد. پس سرعت مطلق Q برابر است با

$$V_Q=V_C\longrightarrow V_{Q/C}$$

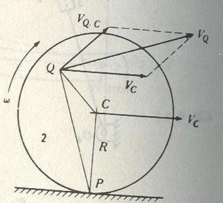
که درشکل ۷.۶ نشان داده شده است. همچنین بردار V_Q عمود بر PQ است، که‌درلحظهٔ فوق شعاع دوران نقطهٔ Q محسوب می‌شود.

حال به‌جای نقطهٔ Q، نقطهٔ P از دیسك را درنظر می گیریم. پس

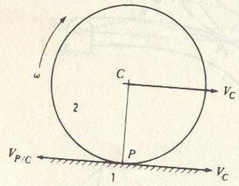
$$V_P=V_C\longrightarrow V_{P/C}$$

بردارهای فوق درشکل ۸.۶ نشان داده شده‌اند، وچون $V_{P/C}$ اندازه‌ای معادل V_C دارد ولی راستای آن مخالف V_C است، بنابراین نقطهٔ P روی دیسك سرعت مطلق صفردارد. اگر نقطهٔ P متعلق به‌میلهٔ ۱ فرض شود به‌طوری که برنقطهٔ P مربوط به‌جسم ۲ منطبق باشد، بازهم سرعت آن صفر خواهد بود زیرا جسم ۱ ساکن است.

مثال ۲.۶ یك مکانیسم زود برگشت درشکل ۹.۶ نشان داده‌شده است. B_2 نقطه‌ای روی میلهٔ ۲ وسرعت‌آن، V_{B_2} معلوم است. به‌دنبال سرعت D هستیم. سرعتهای زاویه‌ای میله‌های ۴ و ۵ نیز مطلوب‌اند. درشکل ۱۰.۶، بردار $O'_2B'_2$ بیانگر V_{B_2} است. B_4 نقطه‌ای روی میلهٔ ۴ است که درآن لحظه بر B_2 انطباق دارد. اندازهٔ V_{B_4} مجهول ولی جهت آن بر O_4B_4، یعنی شعاع دوران نقطهٔ B_4 عمود



شکل ۷.۶



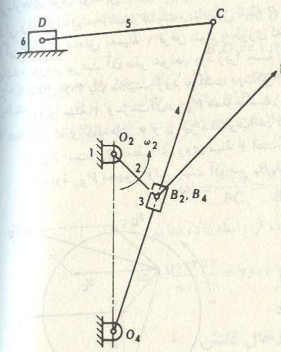
شکل ۸.۶

است. چون B_4 نمی‌تواند درجهت عمود بر میلهٔ ۴ حرکتی نسبت به B_2 داشته باشد، پس V_{B_4/B_2} باید موازی میله باشد. بنابراین از B'_2 خطی به‌موازات O_4C رسم می‌کنیم. محل تلاقی‌آن با خط گذرا از O'_4 و عمود بر O_4B_4، نقطهٔ B'_4 را تعیین می کند. پس بردار $O'_4B'_4$ همان سرعت V_{B_4} و $B'_2B'_4$ برابر V_{B_4/B_2} است. بردار O'_4C' نیز بیانگر V_C است که باید بر O_4C یعنی شعاع دوران نقطهٔ C عمود باشد. طول O'_4C' نیز از تناسب زیر به‌دست می‌آید:

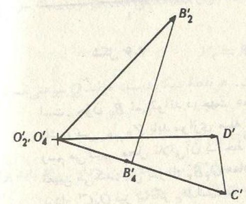
پس

$$O'_4C' = \frac{O_4C}{O_4B_4}(O'_4B'_4)$$

$$\frac{O'_4C'}{O'_4B'_4} = \frac{O_4C}{O_4B_4}$$



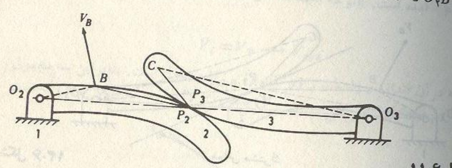
شکل ۹.۶



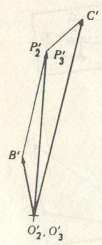
شکل ۱۰.۶

از نقطهٔ C' خطی عمود بر CD رسم شده است. محل تلاقی آن با خط افقی گذرا از نقطهٔ O'_2، نقطهٔ D' را مشخص می کند. بردار O'_2D' بیانگر V_D و $C'D'$ نیز بیانگر $V_{D/C}$ است. حال داریم $\omega_4 = V_C/O_4C$ و $\omega_5 = V_{C/D}/CD$. از شکل ۱۰.۶ درمی‌یابیم که V_C جهتی به‌سمت راست دارد و ω_4 نیز درجهت گردش عقربه‌های ساعت است. همچنین $V_{C/D}$ به‌طرف پایین و بنابراین ω_5 درجهت گردش عقربه‌های ساعت است.

مثال ۳.۶ درشکل ۱۱.۶، یك مکانیسم تماس مستقیم نشان داده شده است. P_2 و P_3 به‌ترتیب نقاطی از میله‌های ۲ و ۳ هستند که درلحظهٔ فوق برهم منطبق‌اند. چون نقطهٔ تماس روی خط مراکز O_2O_3 قرار دارد، بنابراین دو جسم ۲ و ۳ در لحظهٔ فوق‌تماس غلتشی‌دارند. سرعت B معلوم است ومی‌خواهیم سرعت C را تعیین کنیم. چندضلعی سرعت درشکل ۱۲.۶ رسم شده است، که درآن V_B به‌صورت O'_2B' و در راستای عمود بر O_2B به‌نمایش درآمده است. چون V_{P_2} باید عمود



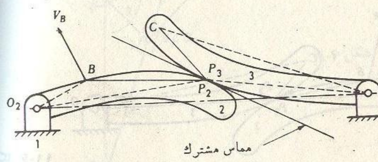
شکل ۱۱.۶



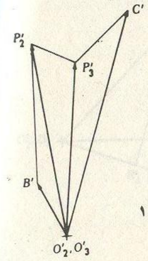
شکل ۱۲.۶

برشعاع دوران نقطهٔ P_2 باشد، بنابراین خطی عمود بر O_2P_2 از O'_2 رسم می‌شود. حال ازنقطهٔ B' خطی عمود بر BP_2 کشیده می‌شود. محل تلاقی این دوخط، P'_2 را تعیین می کند. $O'_2P'_2$ و $B'P'_2$ به‌ترتیب بیانگر V_{P_2} و $V_{P_2/B}$ هستند. همان‌طور که درقسمت ۱۵.۲ توضیح داده شد، وقتی که دو جسم تماس غلتشی داشته باشند، سرعتهای نقاط تماس آنها یکسان خواهد بود. بنابراین درشکل ۱۲.۶، $O'_2P'_3$ معرف V_{P_3} است. خط رسم شده از O'_3 و عمود بر شعاع O_3C، راستای V_C را تعیین می کند. حال از P'_3 خطی عمود بر P_3C رسم می‌شود. محل تلاقی این خط با خط کشیده شده از O'_3، نقطه C' را مشخص می کند، که درآن O_3C' بیانگر V_C و P'_3C' معرف V_{C/P_3} است.

مثال ۴.۶ درشکل ۱۳.۶، مکانیسم شکل ۱۱.۶ در فاز دیگری دوباره رسم شده است. باید توجه کرد که نقطهٔ جدید تماس اجسام ۲ و ۳ بر خط مراکز O_2O_3 قرار



شکل ۱۳.۶



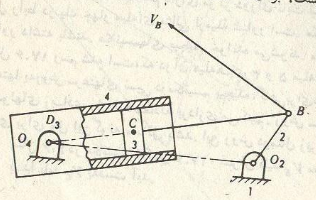
شکل ۱۴.۶

ندارند. بنابراین اجسام دراین حالت، همان گونه که درقسمت ۱۴.۲ توضیح داده شد، تماس لغزشی دارند. دوباره فرض می کنیم که سرعت B معلوم و سرعت C مطلوب است. چندضلعی سرعت درشکل ۱۴.۶ رسم شده است. بردار $O'_2P'_2$ عمود بر O_2P_2 است وهمچون موردشکل ۱۲.۶ به‌دست می‌آید. ازآنجا که V_{P_3} باید بر شعاع دوران P_3 عمودباشد، بنابراین ازنقطهٔ O'_3 خط $O'_3P'_3$ را عمودبر O_3P_3 رسم می کنیم. درحالت تماس لغزشی، V_{P_3/P_2} درامتداد مماس قرار دارد. بنابراین از P'_2 خطی به‌موازات خط مماس رسم می‌شود. با یافتن محل تلاقی آن با خط رسم‌شده از O'_3، نقطهٔ P'_3 به‌دست می‌آید. $O'_3P'_3$ و $P'_2P'_3$ به‌ترتیب بیانگر V_{P_3} و V_{P_3/P_2} هستند. نقطهٔ C' با رسم خطی از O'_3 و عمود بر O_3C وخطی از P'_3 و عمود بر P_3C به‌دست می‌آید، پس O'_3C' بیانگر V_C و P'_3C' نیز معرف V_{C/P_3} است.

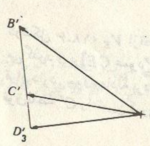
مثال ۵.۶ در شکل ۱۵.۶، مکانیسم موتور بخار با سیلندر نوسانی نشان داده شده است. V_B معلوم است و می‌خواهیم V_C را بیابیم. V_B به‌صورت O'_2B' در شکل ۱۶.۶ آمده است. باتوجه به‌معادلهٔ سرعتهای نسبی داریم

$$\bar{V}_C = V_B \longrightarrow \bar{V}_{C/B}$$

که درآن اندازه و راستای V_C و اندازهٔ $V_{C/B}$ مجهول است. بنابراین سه مجهول داریم ومعادله قابل حل نیست. برای یافتن V_C لازم است که ابتدا V_{D_3} را به‌دست



شکل ۱۵.۶



شکل ۱۶.۶

آوریم. نقطهٔ D_4، روی‌امتداد میلهٔ ۳، درلحظهٔ فوق برمحور O_4 منطبق است. پس

$$\bar{V}_{D_4} = V_B \longrightarrow \bar{V}_{D_4/B}$$

نقطهٔ D_4 فقط می‌تواند درجهت خط BD_4 سرعت داشته باشد. بنابراین راستای V_{D_4} معلوم است. درشکل ۱۶.۶، خطی از B' وعمود بر BD_4 رسم شده وخطی ازقطب $O'_2O'_4$ به‌موازات BD_4 کشیده شده است. محل تلاقی این دوخط، نقطهٔ D'_4 را تعیین می‌کند. پس $O'_2D'_4$ همان V_{D_4} و $B'D'_4$ نیز همان $V_{D_4/B}$ است. اکنون نقطهٔ C' با تناسب زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{B'C'}{B'D'_4} = \frac{BC}{BD_4}$$

پس

$$B'C' = \frac{BC}{BD_4}(B'D'_4)$$

که بردار O'_2C' بیانگر بردار V_C است.

۶.۶ سرعتها درمکانیسمهای پیچیده

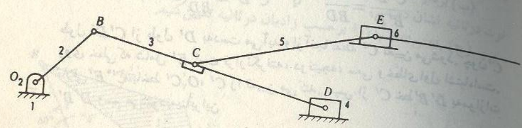
زمانی‌که میله‌ای دریک مکانیسم دارای مرکز دوران ثابت نباشد به‌آن میلهٔ شناور گویند. میل رابط در یك چهار میله‌ای مثالی ازمیلهٔ شناور است. مکانیسمهایی که دو یا چند میلهٔ شناور داشته باشند. مکانیسمهای پیچیده خوانده می‌شوند. مثالی از این‌نوع مکانیسم در شکل ۱۷.۶ رسم شده است، که درآن میله‌های ۳ و ۵ میله‌های شناورند. هنگام تحلیل سرعتها به‌روش سرعتهای نسبی درمکانیسم پیچیده، گاهی برای‌دستیابی مستقیم به‌حل‌مسئلهٔ مجهولهای زیادی را وارد معادلهٔ برداری می کنیم. روش سعی وخطا می‌تواند روش مفیدی برای حل این گونه مسائل باشد. این روش درمثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۶.۶ در مکانیسم شکل ۱۷.۶، فرض کنید V_E معلوم و V_B مطلوب است. ابتدا باید V_C به‌دست آید.

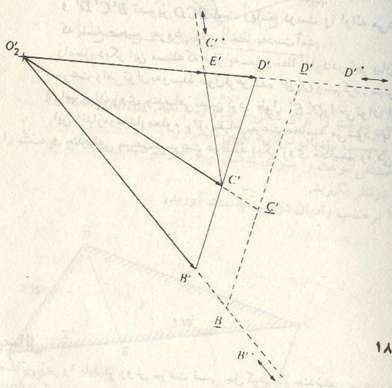
$$V_C = V_E \longrightarrow \bar{V}_{C/E}$$

درشکل ۱۸.۶، V_E ازقطب O'_2 به‌وسیلهٔ بردار O'_2E' رسم می‌شود. $V_{C/E}$ از E' می گذرد و بر CE عمود است. C'' نشان می‌دهد که C' درنقطه‌ای از این عمود قرار دارد. چون‌معادلهٔ برداری بیش‌از دومجهول دارد، پس نمی‌توان تنها بامعادلهٔ فوق‌نقطهٔ C' را تعیین کرد. پاسخ را می‌توان با تعیین سرعت نقاطی ازمیلهٔ ۳ به‌صورت سعی و خطا به‌دست آورد. معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$V_B = V_D \longrightarrow V_{B/D}$$



شکل ۱۷.۶



شکل ۱۸.۶

هر طولی از O'_2D' که درشکل ۱۸.۶ آمده است، را می‌توان به‌عنوان V_D فرض کرد. پس V_B، O'_2B' خواهدبود که بر O_2B عمود است و $D'B'$ نیز بر DB عمود است. اکنون معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید.

$$V_C = V_D \longrightarrow V_{C/D}$$

که $V_{C/D}$ همان $D'C'$ و بر CD عمود است. با تناسب زیر

$$\frac{C'D'}{B'D'}=\frac{CD}{BD} \quad \text{یا} \quad C'D'=\frac{CD}{BD}(B'D')$$

طول $C'D'$ از طول D' به‌دست می‌آید و از آنجا نقطهٔ C' تعیین می‌شود. چون C' روی خطی که شامل E' است قرارنگرفته، درنتیجه، سعی و خطای اول اشتباه‌است. تلاقی $C''E'$ باخط O'_2C'، C' را تعیین می کند. سپس از C' خط $D'B'$ به‌موازات $D'B'$ رسم می‌شود. بنابراین

$$\frac{C'D'}{B'D'}=\frac{CD}{BD}$$

و $B'C'D'$ تصویر BCD است وپاسخ درست را ارائه می‌دهد. ملاحظه می‌شود که پاسخ صحیح به‌روش سعی وخطا به‌دست‌آمد.

راه‌حل دیگر این مسئله که نیاز به‌سعی‌وخطا ندارد در زیر بیان شده است. چندضلعی سرعت رامی‌توان به‌وسیلهٔ طول فرض‌شده O'_2B' رسم کرد. سپس نقاط D'، C' و E' رامی‌توان روی چندضلعی تعیین کرد. طول O'_2E' را می‌توان اندازه‌گرفت. از روی این اندازه‌ومقدارمعلوم V_E، مقیاس‌سرعت محاسبه می‌شود. با استفاده ازاین‌مقیاس و چندضلعی سرعت، سرعت هرنقطهٔ دیگر روی مکانیسم را می‌توان تعیین کرد.

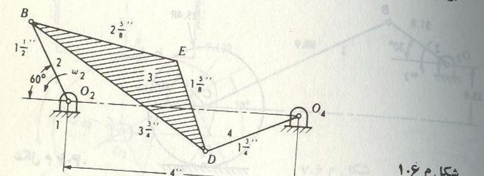
مسائل

مسائل زیر را باید از روش سرعت نسبی حل کرد. در چندضلعی سرعت باید تصویر تمام نقاط نامگذاری شده درمکانیسم به‌دست آید. مقیاس سرعت را $1\text{mm} = ۰٫۱۲۰\text{m/s}$ درنظر بگیرید، مگر آنکه درمسئله غیراز آن بیان شود. درمسائلی که سرعت زاویه‌ای باید تعیین شود، اندازه وجهت آن را نیز مشخص کنید. (مثلاً cw و یا ccw)

۱.۶ (الف) چندضلعی سرعت را برای شکل م ۱.۶ رسم کنید. $V_B = ۲\text{in}$ و مقیاس‌سرعت را $1\text{in} = ۱۰\text{ft/s}$ درنظر بگیرید.

(ب) بردارهای V_B، V_D و V_E را روی مکانیسم رسم کنید ومقادیر آنها رابرحسب فوت درثانیه نشان دهید.

(ج) ω_2، ω_3 و ω_4 را برحسب رادیان درثانیه تعیین کنید.



شکل م ۱.۶

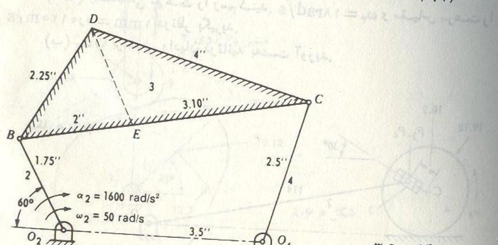
(ج-۲)

۲.۶ (الف) چندضلعی سرعت را برای شکل م ۴.۴ رسم کنید. $V_B = ۵۰٫۸\text{mm}$

(ب) ω_3 را برحسب رادیان درثانیه تعیین کنید.

۳.۶ (الف) چندضلعی سرعت را برای شکل م ۳.۶ رسم کنید و مقیاس سرعت را $1\text{in} = ۲۵\text{in/s}$ درنظر بگیرید.

(ب) ω_3 را برحسب رادیان درثانیه به‌دست آورید.

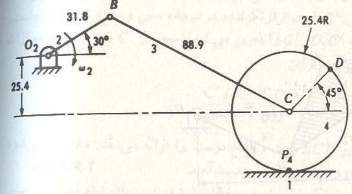


شکل م ۳.۶

(۴-۶)

۴.۶ (الف) درشکل م ۴.۶، میلهٔ ۴ روی میلهٔ ۱ می‌غلتد. چندضلعی سرعت را رسم کنید. $\omega_2 =$ ۱۴۴rad/s.

(ب) ω_3 و ω_4 را بر حسب رادیان بر ثانیه به‌دست آورید.



شکل م ۴.۶

۵.۶ در شکل م ۳.۴، روی مفصل میلهٔ ۳، نقاط P_2 و P_4 از میله‌های ۲ و ۴ را که برهم منطبق هستند، نامگذاری کنید درصورتی‌که $\omega_2 =$ ۱۲۰rad/s.

(الف) چندضلعی سرعت را برای نقاط O_2، P_2، P_4 و C رسم کنید.

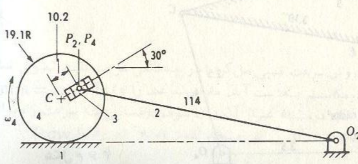
(ب) ω_4 را برحسب رادیان درثانیه به‌دست آورید.

(۶-۶)

۶.۶ درشکل م ۶.۶، جسم ۴ روی جسم ۱ می‌غلتد.

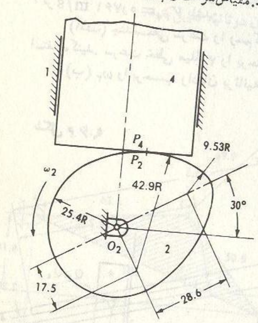
(الف) چندضلعی سرعت را رسم کنید. $\omega_4 =$ ۱۸rad/s و مقیاس سرعت را ۱mm = ۰٫۰۱۲۰m/s درنظر بگیرید.

(ب) ω_2 را برحسب رادیان درثانیه به‌دست آورید.



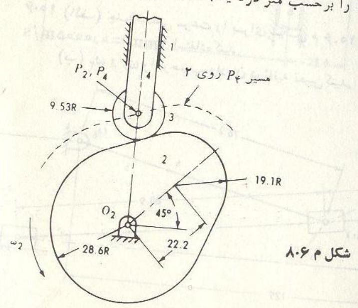
شکل م ۶.۶

۷.۶ بادامک شکل م ۷.۶ باسرعت ۵۰۰ r/min می‌چرخد. $O_2P_2 =$ ۲۹٫۲mm است. سرعت میلهٔ ۴ را برحسب متر درثانیه به‌دست آورید. مقیاس سرعت ۱mm = ۰٫۰۲۴۰m/s است.



شکل م ۷.۶

۸.۶ چندضلعی سرعت را برای شکل م ۸.۶ رسم کنید. P_2 و P_4 نقاط منطبق برهم از میله‌های ۲ و ۴ هستند و $\omega_2 =$ ۱۵rad/s. مقیاس سرعت را ۱mm = ۰٫۰۱۲m/s درنظر بگیرید. سرعت میلهٔ ۴ را برحسب متر درثانیه به‌دست آورید.



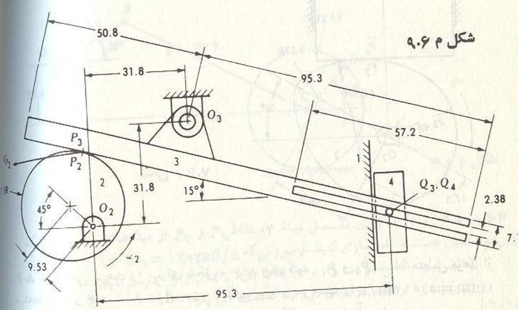
شکل م ۸.۶

۹.۶ درشکل م ۹.۶، $P_۲$ و $P_۳$ به‌ترتیب نقاطـی از میله‌های ۲ و ۳ هستندکـه برهم منطبق‌اند و $Q_۳$ و $Q_۴$ نیز به‌ترتیب نقاطی از میله‌های ۳ و ۴ هستندکه برهم منطبق‌اند. اگر $V_{P_۲} = ۰٫۷۶۲\ m/s$ باشد:

(الف) چندضـلعی سرعت را رسم کنید. ازمقـیاس سرعت $۱mm = ۰٫۰۲۰m/s$ استفاده کنید. سرعت خطی میلهٔ ۴ را برحسب متر درثانیه به‌دست آورید.

(ب) $\omega_۳$ را برحسب رادیان برثانیه تعیین کنید.

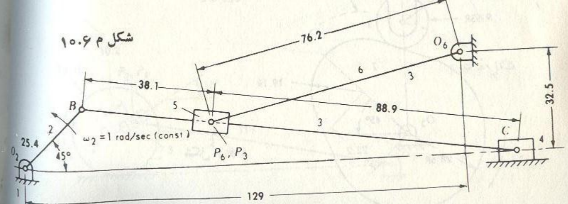
شکل م ۹.۶



۱۰.۶ (الف) چنـدضـلعی سرعت را بـرای شکـل م ۱۰.۶ رسم کنید. ازمـقیاس سرعت $۱mm = ۰٫۰۰۰۵m/s$ استفاده کنید.

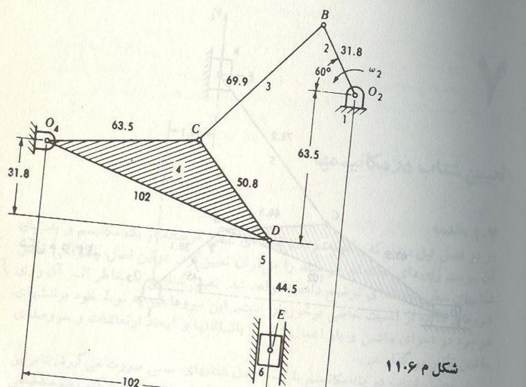
(ب) $\omega_۳$ و $\omega_۶$ را برحسب رادیان درثانیه تعیین کنید.

شکل م ۱۰.۶



۱۱.۶ (الف) چندضلعی سرعت را برای شکل م ۱۱.۶ رسم کنید. $\omega_۲ = ۱۴۴rad/s$ است. سرعت لغزندهٔ ۶ را برحسب متر درثانیه به‌دست آورید.

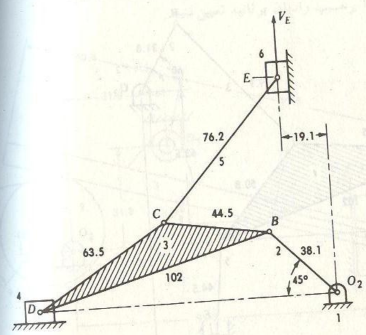
(ب) $\omega_۳$، $\omega_۴$ و $\omega_۵$ را برحسب رادیان درثانیه تعیین کنید.



شکل م ۱۱.۶

۱۲۰۶ (الف) در شکل م ۱۲۰۶، سرعت نقطهٔ E برابر ۴٫۵۷m/s است. با استفاده از روش سعی وخطا چندضلعی سرعت را رسم کنید. سرعت نقطهٔ D را برحسب متر در ثانیه به‌دست آورید.

(ب) ω_3 و ω_5 را برحسب رادیان درثانیه به‌دست‌آورید.



شکل م ۱۲۰۶

۷

تعیین شتاب درمکانیسمها

۱۰۷ مقدمه

در دو فصل قبل دیدیم که چگونه‌سرعت لحظه‌ای خطی هرنقطه از یك مکانیسم و به‌دنبال آن سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای هر میله را می‌توان تعیین‌کرد. دراین فصل چگونگی تعیین شتابهای خطی لحظه‌ای توضیح داده خواهد شد. تعیین شتاب، به‌خاطر اثر آن روی نیروهای ماند، از اهمیت خاصی برخوردار است. این نیروها نیز به نوبهٔ خود برتنشهای موجود در اجزای ماشین و بار اعمال شده بر یاتاقانها و ایجاد ارتعاشات و سروصدای ماشین تأثیر می‌گذارند.

تحلیل شتاب در یك مکانیسم با جمع‌کردن شتابهای نسبی صورت می‌گیرد. بنابراین روش‌کار درست‌مشابه‌روش دنبال‌شده درسرعتهای نسبی‌است. درآنجا هنگام رسم‌چندضلعی سرعت، قطب باعلامت O'_2 نمایش‌داده می‌شد. قطب چندضلعی شتاب باعلامت O''_2 نمایش داده می‌شود وتمام نقاط روی چندضلعی دارای علامت (″) خواهند بود. خطوطی‌که از قطب به‌نقاط روی چندضلعی شتاب وصل شوند، بیانگر شتابهای مطلق نقاط فوق روی مکانیسم‌اند وخطی‌که هردونقطه از چندضلعی را به‌هم وصل کند، مبین شتاب نسبی نقاط فوق روی مکانیسم است.

معادله‌های زیرکه درفصل ۲ برای شتاب یك‌نقطه به‌دست آمده‌اند، درحل مسائل این فصل نیز به‌کارگرفته می‌شوند:

$$A^n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 = V\omega \qquad (1.7)$$