۱۷

نیروهای ماند در ماشینها

۱۰۱۷ مقدمه

درفصل قبل توضیح دادیم که تمام نیروهای وارد بریک ماشین به‌جز نیروهای ناشی از شتاب، به‌صورت نیروهای استاتیکی درنظر گرفته می‌شوند. به‌علاوه دیدیم که چگونه نیروهای استاتیکی به‌وسیلهٔ میله‌های یك مکانیسم منتقل می‌شوند.

نیروهای ناشی از شتاب را نیروهای ماند (اینرسی) یا نیروهای دینامیکی نامند.

به‌منظور تحلیل نیروهای ماند، آگاهی از شتابها ضروری است. به‌همین‌خاطر است که تحلیل شتاب مکانیسمها درفصل قبل به‌تفصیل مورد بررسی قرارگرفت. به‌طور کلی میله‌های یك مکانیسم درمعرض هردو نیروی استاتیکی وماند قرار می گیرند. درماشینهای با سرعت بالا، شتابها ونیروهای ماند ناشی ازآنها ممکن است نسبت به‌نیروهای‌استاتیکی انجام‌دهندهٔ کار مفید خیلی بزرگ باشند. برای مثال در یک موتور رفت وبرگشتی مانند موتور اتومبیل، در سرعتهای بالا ممکن است نیروهای ماند ازنیروهای وارد به‌وسیلهٔ فشارگاز روی پیستون بزرگتر باشند. در یك توربین گازی نیروهای ماند ناشی ازکمی نامتوازن بودن روتور، ممکن است روی یاتاقانها نیروهایی بسیار بزرگتر از نیروی وزن روتور اعمال کنند. درچنین‌حالتهایی نیروهای‌ماند باید درطراحی ماشین درنظرگرفته شوند. درماشینهای با سرعت پایین می‌توان از نیروهای ماند صرف‌نظر کرد.

دراین فصل‌چگونگی انتقال نیروهای ماند همراه با نیروهای استاتیکی درمیله‌های یك مکانیسم واثرات آنها را روی قاب مطالعه می کنیم. این گونه تحلیل مرکب نیرو را تحلیل کامل نیرو می‌نامند.

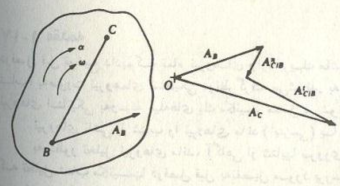
۲.۱۷ معادله‌های حرکت

اگرشتاب نقطه‌ای ازیك جسم را بدانیم وسرعت زاویه‌ای ω وشتاب α برای جسم‌معلوم باشد. آنگاه شتاب هـرنقطهٔ دیگراز جسم را می‌توان یافت. مثلاً درشکل ۱.۱۷ الف، فرض‌کنید A_B شتاب نقطهٔ B معلوم است. آنگاه A_C شتاب هرنقطهٔ C چنین است:

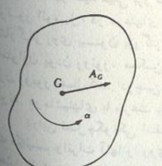
$$A_C = A_B \longrightarrow A^n_{C/B} \longrightarrow A^t_{C/B} \qquad (۱.۱۷)$$

که مقدار $A^n_{C/B}$ برابر $(BC)\omega^2$ ومقدار $A^t_{C/B}$ مساوی $(BC)\alpha$ است. پاسخ A_C در شکل ۱.۱۷ ب نشان داده شده است.

تغییرمکان جسم را می‌توان به‌صورت تغییر مکان نقطه‌ای ازآن به‌علاوهٔ تغییرمکان زاویه‌ای جسم حـول همین نقطه درنظرگرفت. همین مفهوم بـرای سرعت یك‌جسم نیـز صادق است. به‌همین‌ترتیب شتاب یك جسم را می‌توان به‌صورت شتاب خطی نقطه‌ای از جسم به‌عـلاوهٔ شتاب زاویه‌ای جسم حـول همین نقطه درنظرگرفت. انتخاب ایـن نقطه به‌عنوان مرکزجرم مناسب است.

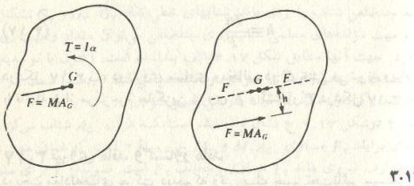


شکل ۱.۱۷



شکل ۲.۱۷

شکل ۲.۱۷ را درنظر بگیرید. G را مرکز جـرم جسم و A_G را شتاب همین‌نقطه فرض‌کنید. همچنین فرض‌کنید مقدار α شتاب زاویه‌ای جسم معلوم و درجهت نشان داده شده باشد. می‌خواهیم نیرو، گشتاور یا نیرو و گشتاور لازم برای ایجاد A_G و α رابیابیم. این جسم مجدداً درشکل ۳.۱۷ الف نشان داده شده است. ازعلم مکانیك‌می‌دانیم



شکل ۳.۱۷

نیروی F که در G ودرجهت A_G وارد شود، شتاب خطی زیررا ایجاد می‌کند:

$$F = MA_G \qquad (۲.۱۷)$$

که M جرم جسم است. این، قانون نیوتن برای‌حرکت خطی است. به‌منظور ایجادشتاب زاویه‌ای α، گشتاور T باید درهمان جهت α روی جسم وارد شود

$$T = I\alpha \qquad (۳.۱۷)$$

دراینجا I گشتاور ماند جرمی حول یك محور گذرنده از G و عمود برصفحهٔ دوران است. این محور برصفحهٔ کاغذ عمود است. معادلهٔ دوم، معادلهٔ نیوتن بـرای حرکت زاویه‌ای است. به‌طور کلی جسمی که حرکت صفحه‌ای دارد، ممکن است در معرض بیش ازیك‌نیرو وگشتاور قرارگیرد. آنگـاه در شکل ۳.۱۷ الف، F برایند تمامی نیروهـای وارد و T برایند تمامی گشتاورهای اعمال شده برجسم است. از این‌رو F نیروی برایند و T گشتاور برایند نامیده می‌شود.

درمکانیك واژه‌های گشتاور، لنگـر و گشتاور پیچشی اغلب به‌صورت مترادف به‌کار می‌روند. یك اصل‌مکانیك این است‌که یك نیرومی‌تواند جایگزین یك نیرو و گشتاورشود. جسم شکـل ۳.۱۷ الف مجدداً درشکـل ۳.۱۷ ب نشان داده شده است، کـه درآن سه نیروی نشان داده شده ازنظر مقدار مساویند. نیروی تصویرشده باخط‌چین که به‌طرف‌بالا وسمت راست وارد می‌شود، کار نیروی F درشکل ۳.۱۷ الف را انجام می‌دهد. نیروی خط‌چین‌که به‌طرف پایین سمت‌چپ اعمال می‌شود همراه با نیروی F نشان داده‌شده باخط

پر، گشتاور Fh را به‌وجود می‌آورند. که باید از نظر مقدار وجهت مساوی T درشکل ۳.۱۷ الف باشد. ازاین‌رو

$$Fh = T = I\alpha$$

یا

$$h = \frac{I\alpha}{F} \qquad (۴.۱۷)$$

درشکل ۳.۱۷ ب، دونیروی مساوی ومخالف در G خنثی می‌شوند وبنابراین نیروی F با فاصلهٔ h از مرکزجرم جایگزین نیروی F و گشتاور T درشکل ۳.۱۷ الف می‌شود.

۳.۱۷ نیروی ماند وگشتاور ماند

دربحث معادله‌های حرکت دیدیم که وقتی یک جسم تحت‌تأثیر سیستمی از نیروها قرار می گیرد، شتاب زاویه‌ای جسم به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$F = MA_G \qquad (۵.۱۷)$$

داده می‌شود که F نیروی برایند است. همچنین وقتی یک جسم تحت‌تأثیر سیستمی از گشتاورها قرار می گیرد، شتاب زاویه‌ای جسم به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$T = I\alpha \qquad (۶.۱۷)$$

داده می‌شود. که T گشتاور برایند است.

نیروی ماند به‌صورت مخالف نیروی برایند وگشتاورماند به‌صورت مخالف گشتاور برایند تعریف می‌شود. همزمان با وارد شدن نیروی برایند روی جسم، اگر فرض کنیم نیروی ماند با همان مقداروجهت مخالف وارد می‌شود، آنگاه شتاب زاویه‌ای مرکزجرم صفرخواهد بود. همچنین همزمان با وارد شدن گشتاور برایند روی جسم اگر فرض کنیم گشتاور ماند باهمان مقدار وجهت مخالف وارد می‌شود، آنگاه شتاب زاویه‌ای جسم صفر خواهد بود. بنابراین باافزودن نیرو و گشتاور ماندکه تحت اثرنیرو و گشتاور برایندبه‌یک جسم وارد می‌شوند، جسم به‌حال تعادل‌درمی‌آید. این‌فرضیه اصل دالامبر[1] نامیده‌می‌شود وما را درجهت حل‌مسائل دینامیک به‌صورت مسائل استاتیک یاری می کند.

1. D'Alembert's principle

۴.۱۷ نیروهای ماند روی یك چهارمیله‌ای

به‌عنوان یك مثال برای نشان دادن نیروهای ماند وارد بریك مکانیسم، فرض کنید چهار میله‌ای شکل ۴.۱۷ الف دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ω_2 باشد. نقاط G_2 و G_3 و G_4 مراکز جرم میله‌های ۲، ۳ و ۴ را مشخص می کنند. درتحلیل خود، گشتاوری را تعیین خواهیم کرد که بایدمحوردر نقطهٔ O_2 روی لنگ۲ اعمال کند تا حرکت مطلوب حاصل‌شود.

باید چندضلعی شتاب را برای یافتن شتابهای خطی نقاط G_2، G_3 و G_4 تشکیل‌داد. از مقدار وجهت مؤلفه‌های مماسی شتاب روی چندضلعی می‌توان مقدار وجهت α_3 و α_4 را تعیین کرد. جهت آنها مطابق شکل ۴.۱۷ الف پیداشده است. اکنون با توجه‌به‌شکل ۴.۱۷ الف، جهت شتاب زاویه‌ای هرمیله را مشخص می کنیم تا بعداً سمت و راستای گشتاور برایند و گشتاور ماند آن میله بدرستی تعیین شود.

میلهٔ ۲ درشکل ۴.۱۷ ج نشان داده شده است، که درآن A_{G_2} شتاب مرکز جرم است. نیروی برایند F_2 مساوی $M_2A_{G_2}$ و M_2 جرم میلهٔ ۲ است که همان جهت وخط اثر A_{G_2} را دارد. نیروی ماند f_2 مساوی ومخالف F_2 است. توجه: f برای مشخص کردن نیروی ماند به کارخواهد رفت.

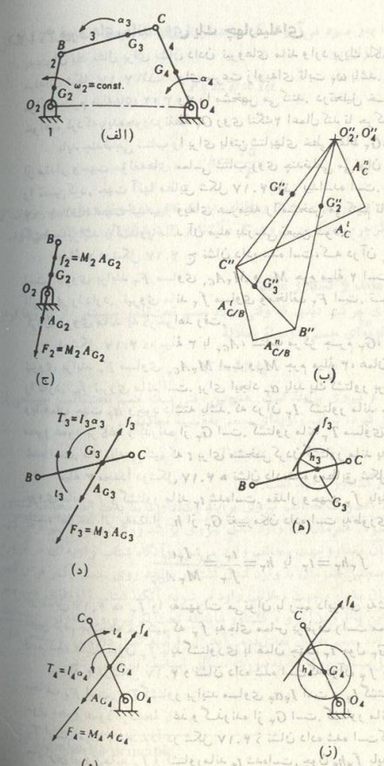
درشکل ۴.۱۷ د، میلهٔ ۳ با A_{G_3}، شتاب مرکز جرم G_3، نشان داده شده است. نیروی برایند F_3 مساوی $M_3A_{G_3}$ است وM_3 جرم میلهٔ ۳، همان جهت و خط اثر A_{G_3} را دارد. f_3 نیروی ماند است. برای ایجاد α_3 باید یك گشتاور برایند T_3 مساوی $I_3\alpha_3$ وبا همان جهت α_3 وجود داشته باشد. که درآن I_3 گشتاور ماند جرمی میلهٔ ۳ حول یك محور عمود بر کاغذ و گذرنده از G_3 است. گشتاور ماند T_3 مساوی و مخالف t_3 نشان داده شده است. ملاحظه‌می کنیم که t برای مشخص کردن گشتاور ماند به کاررفته است.

میلهٔ ۳ مجدداً درشکل ۴.۱۷ هـ نشان داده‌شده ومطابق شکل، نیروی f_3 جایگزین نیروی ماند f_3 و گشتاور ماند t_3 شده‌است. مقدار وجهت f_3 باید مطابق شکل ۴.۱۷ د باشد، اما خط اثر به‌مقدار h_3 از G_3 تغییرمکان داده است به‌طوری‌که:

$$f_3h_3 = t_3 \quad \text{یا} \quad h_3 = \frac{t_3}{f_3} = \frac{I_3\alpha_3}{M_3A_{G_3}}$$

در شکل ۴.۱۷ هـ، f_3 را به‌سهولت می‌توان با رسم دایره‌ای به‌شعاع h_3 و به‌مرکز G_3 تعیین کرد. ملاحظه می کنیم که f_3 به‌جای مماس برطرف راست مماس برطرف چپ دایره رسم شده است، چون f_3 بایدگشتاوری با همان جهت t_3 حول G_3 ایجادکند.

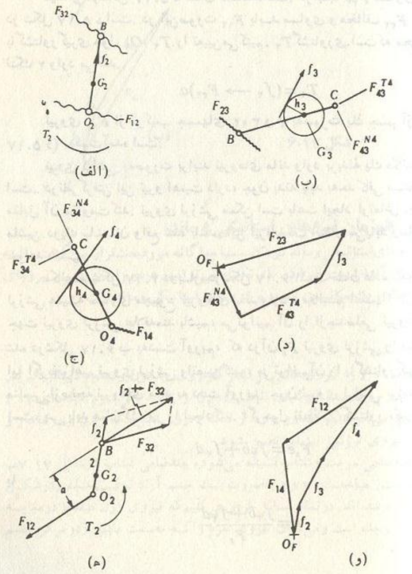
میلهٔ ۴ درشکل ۴.۱۷ و نشان داده شده است که درآن f_4 نیروی ماند مساوی و مخالف F_4 است. T_4 گشتاور برایند مساوی $I_4\alpha_4$ است و I_4 گشتاور ماند جرمی میلهٔ ۴ حول محور عمود برصفحهٔ کاغذ و گذرنده از G_4 است. گشتاور ماند t_4 مساوی ومخالف T_4 است. میلهٔ ۴ مجدداً در شکل ۴.۱۷ ز نشان داده شده است که درآن، نیروی f_4 جایگزین نیروی‌ماند f_4 و گشتاورماند t_4 شده‌است. چون f_4h_4 بایدمساوی t_4 باشد، پس:



شکل ۴.۱۷

$$h_4 = \frac{t_4}{f_4} = \frac{I_4 \alpha_4}{M_4 A_{G_4}}$$

اکنون نیروهای وارد برهرمفصل و گشتاوری که محور G_4 برای ایجاد حرکت مورد نظر در O_2 روی لنگ ۲ وارد می‌کند، را می‌یابیم. نمودارهای جسم آزاد میله‌های ۲، ۳ و ۴ درشکلهای ۵.۱۷ الف تا ۵.۱۷ ج نشان داده شده است. نیروهای ماند به‌عنوان نیروهای خارجی معلوم درنظر گرفته شده‌اند و هرمیله تحت کنش نیروهای ماند و واکنشهای



شکل ۵.۱۷

مجهول درحال تعادل است. دراین‌صورت تعیین این واکنشها همانند تحلیل استاتیکی بیان شده درفصل شانزدهم خواهد بود. (توصیه می‌شود دانشجو این فصل را مرور کند.)

ازمیلهٔ ۴ آغازمی کنیم وحول نقطهٔ $O_۴$ گشتاور می گیریم و $F^{T۴}_{۳۴}$ را تعیین می کنیم. آنگاه روی میلهٔ ۳، $F^{T۴}_{۴۳}$ مساوی ومخالف جهت $F^{T۴}_{۳۴}$ خواهد بود. برای تعادل میلهٔ ۳، مجموع گشتاورها حول نقطهٔ B باید صفرباشد. بدین‌ترتیب $F^{N۴}_{۴۳}$ تعیین می‌شود. چندضلعی نیرو برای میلهٔ ۳ درشکل ۵.۱۷ د نشان داده‌شده وسپس به‌منظور تعیین $F_{۲۳}$ دوباره‌رسم شده است.

میلهٔ ۲ درشکل ۵.۱۷ ه نشان داده‌شده‌است. دراینجا $F_{۳۲}$ مساوی ومخالف $F_{۲۳}$ در شکل ۵.۱۷ د است. در این‌صورت $F_{۱۲}$ بایـد مساوی و مخالف $F_{۳۲} \longrightarrow f_۲$ باشد. با گشتاور گیری حول $O_۲$، $T_۲$ را تعیین‌می کنیم. $T_۲$ گشتاوری است که محور در $O_۲$ روی لنگ ۲ وارد می کند.

$$T_۲=(f_۲ \longrightarrow F_{۳۲})a$$

نیروی $F_{۱۴}$ از ترکیب جسمهای ۲، ۳ و ۴ به‌صورت یك جسم آزاد واحد (شکل ۵.۱۷ و) به‌دست‌آمده است.

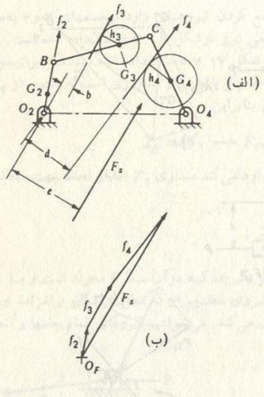
نیروی لرزشی به‌صورت برایند نیروهای ماند وارد بربدنهٔ یك مکانیسم تعریف شده است. درنظر گرفتن این نیرو اهمیت دارد، چون بدنه باید به‌حد کافی مستحکم باشد تا در مقابل آن مقاومت کند. نیروی لرزشی ممکن است باعث ایجاد ارتعاش دربدنه شودواگر ماشین دریك ساختمان واقع شده باشد، این نیروبه‌کف انتقال می‌یابد و اثرات آزاردهنده خواهد داشت.

مکانیسم شکل ۴.۱۷ دوبـاره درشکل ۶.۱۷ الـف نشان داده شده است. نیـروی لرزشی همیشه مساوی مجموع نیروهای ماند وارد برمکانیسم است. اگـرفقط به‌مقدار و جهت نیروی لرزشی علاقه‌مند باشیم، می‌توانیم آن را ازچندضلعی نیروهـای نشان داده شده درشکل ۶.۱۷ ب به‌دست آوریم، که درآن F_s نیروی لرزشی را مشخص می‌سازد. اما اگربخواهیم نیروی لرزشی راتعیین کنیم، می‌توانیم‌آن را باگشتاور گیری حول‌هرنقطهٔ مناسبی ازصفحهٔ نیروهای ماند به دست آوریم. چون نیروی لرزشی برایند نیروهای ماند است، پس باید همان گشتاور را ایجادکند. اگرحول نقطهٔ $O_۲$ گشتاور بگیریم، آنگاه:

$$F_s e=f_۳ b+f_۴ d$$

یا

$$e=\frac{f_۳ b+f_۴ d}{F_s}$$



شکل ۶.۱۷

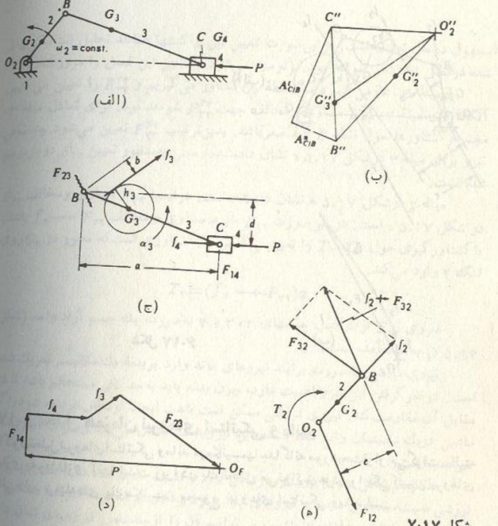
۵.۱۷ تحلیل همزمان نیروهای استاتیکی و ماند

تاکنون‌تحلیل نیروهای‌استاتیکی وماند درمکانیسمها جداگانه موردبحث‌قرار می گرفت. البته نیازی به‌جداسازی آنها نیست زیرا در یك تحلیل می‌توانیم هردو را یکی کنیم. نیروهای کلی وارد برمیله‌های یك مکانیسم، مجموع نیروهای استاتیکی وماند است.

مکانیزم لغزنده-لنگ

درشکل ۷.۱۷ الف، P را نیروی ناشی از فشار گاز روی پیستون ومعلوم درنظربگیرید. همچنین $\omega_۲$ را معلوم وثابت فرض کنید. نقاط $G_۲$، $G_۳$ و $G_۴$ مراکزجرم میله‌های ۲، ۳ و ۴اند. فرض کنید می‌خواهیم گشتاور وارد از لنگ ۲ روی میل‌لنگ را بیابیم. مقدار و جهت وموقعیت نیروی لرزشی نیزباید تعیین شود.

درابتدا چندضلعی سرعت وشتاب کشیده می‌شود، چندضلعی شتاب درشکل ۷.۱۷ب نشان داده شده است. میله‌هـای ۳ و۴ به‌صورت یـك جسم آزاد ترکیب شده ودرشکـل ۷.۱۷ج نشان داده شده‌اند. درتمام مسائل فرض‌می کنیم که نیروی وزن میله‌ها درمقایسه با نیروهای ماند کوچك است ومی‌توان نیروی جرم راکـه به‌سمت پایین ودرمرکز جسم



شکل ۷.۱۷

اعمال می‌شود نادیده گرفت. مگرآنکه خلاف این مطلب تصریح شود. نیروی ماند $f_۳$، بازوی گشتاورآن‌نسبت به $G_۳$ ونیروی ماند $f_۴$ مشابه‌مثال‌پیش‌تعیین می‌شود. مجهولهای مسئله عبارت‌اند ازمقدار وجهت $F_{۲۳}$ ومقدار $F_{۱۴}$. باگشتاورگیری حول B، مقدار $F_{۱۴}$ به‌شرح زیرتعیین می‌شود:

$$F_{۱۴}a+f_۳b+f_۴d-Pd=۰$$

$$F_{۱۴}=\frac{Pd-f_۳b-f_۴d}{a}$$

آنگاه نیروی $F_{۲۳}$ را می‌توان با جمع کردن نیروهـای وارد برجسمهای ۳ و ۴ به‌صورت یك جسم آزاد به‌دست‌آورد. چندضلعی نیرو درشکل ۷.۱۷ د نشان‌داده شده‌است.

نمودار جسم آزاد میلهٔ ۲ درشکل ۷.۱۷ ه نشان‌داده شده است، که برای‌موازنه، $F_{۱۲}$ باید مساوی ومخالف $F_{۳۲} \longrightarrow f_۲$ باشد. $T_۲$ گشتاوری است‌که محور در $O_۲$باید برای تعادل روی لنگ ۲ واردکند. بنابراین

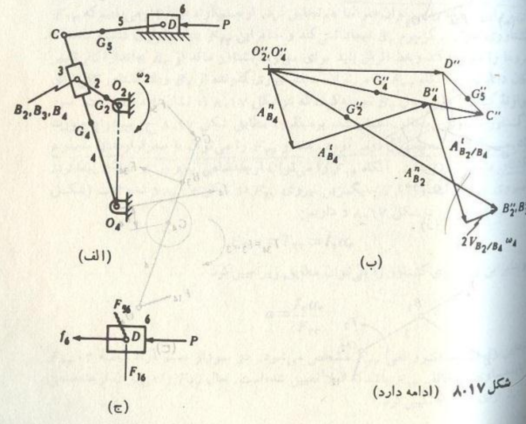
$$T_۲=(f_۲ \longrightarrow F_{۳۲})e$$

گشتاوری که لنگ روی میل‌لنگ وارد می کند مساوی $T_۲$ اما از لحاظ جهت مخالف آن است.

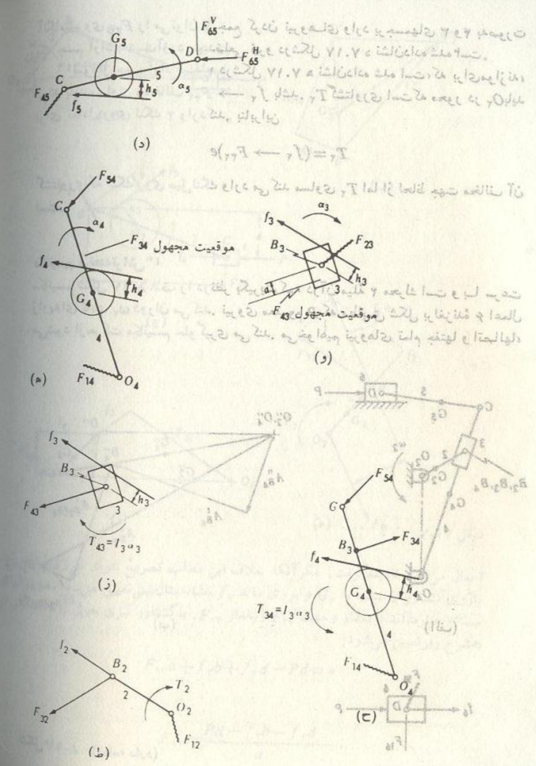
۲۲۶

مکانیسم صفحه‌تراش

مکانیسم شکل ۸.۱۷ الف را درنظر بگیرید، کـه درآن میلهٔ ۲ محرك است و بـا سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۲$ دوران می کند. نیروی معلـوم P که مطابـق شکل برلغزندهٔ ۶ اعمال می‌شود ازحرکت مکانیسم جلوگیری می کند. می‌خواهیم نیروهای تمام جفتها و اتصالها،



شکل ۸.۱۷ (ادامه دارد)



و گشتاور ورودی اعمال شده ازطرف محور در O_2 روی لنگ ۲ را بیابیم. فرض می‌شود که نیروی وزن قابل صرف‌نظر کردن باشد. چندضلعی شتاب درشکل ۸.۱۷ ب نشان داده شده است. دربقیهٔ قسمتهای شکل هرمیله به‌صورت مجـزا نشان داده شده است ومقدار و جهت وموقعیت نیروهای ماند روی هرمیله مانند مثالهای قبل تعیین شده است.

تحلیل نیرو ازمیلهٔ ۶ آغازشده،که در شکل ۸.۱۷ ج نشان‌داده شده است. مجهولها عبارت‌اند از مقدار F_{16} ومقـدار وجهت F_{56}. F_{56}^H مؤلفهٔ افقی F_{56} است ومقدارش را می‌توان با جمع کردن نیروهای افقی روی میلهٔ ۶ به‌دست‌آورد.

درشکل ۸.۱۷ د، نیروی F_{65}^H مساوی‌ومخالف F_{56}^H است. اندازهٔ F_{65}^V رامی‌توان با جمع کردن گشتاورها حول نقطهٔ C یافت: آنگـاه ازچندضلعی نیروی میلهٔ ۵، مقـدار و جهت F_{45} به‌دست می‌آید. درشکل ۸.۱۷ ه، F_{54} معلوم ومساوی ومخالف F_{45} است. درشکل ۸.۱۷ ه، چهارمجهول وجود دارد، مقدار وجهت F_{14} و مقدار وموقعیت F_{34}. چون فقط سه معادلهٔ تعادل موجود است، پس نمی‌توان این نیروها را با درنظر گرفتن‌میله به‌صورت مجزا تعیین کرد. اگرمیلهٔ ۳ نشان داده شده درشکل ۸.۱۷ و را درنظر بگیریم، ملاحظه می کنیم که دراینجا نیزچهار مجهول وجود دارد. مقدار وجهت F_{23}، و مقدار و موقعیت F_{43} که عمود برمیلهٔ ۴ است. اما برای ترکیب میله‌های ۳و۴ فقط شش مجهول داریم واین نیروها را می‌توان همراه‌با هم‌تحلیل کرد. ازجسم آزاد میلهٔ۳درمی‌یابیم که F_{23} گشتاوری حول مرکزجرم B_3 ایجاد نمی کند و بنابراین F_{43} باید مقداری داشته باشدکه نیروها را موازنه کند وخط اثرش باید برای موازنهٔ گشتاور ماند از B_3 به‌اندازهٔ کافی‌تغییر مکان داده شود. آنگاه F_{43} را می‌توان به‌یك نیروی گذرنده از B_3 ویك گشتاور کافی‌برای موازنهٔ گشتاور ماند حول B_3 تجزیه کرد، که درشکل ۸.۱۷ ز، نشان‌داده شده است. نیرو وگشتاور مساوی ومخالف اعمال شده برمیلهٔ ۴، مطابق شکل ۸.۱۷ ح، میله‌رابه‌صورت یك جسم آزاد با سه‌مجهول درمی‌آورد. مقدار F_{34} را می‌توان با صفرقراردادن مجموع گشتاورها حول O_4 یافت. آنگاه F_{14} را می‌توان ازچندضلعی نیرو برای میلهٔ۴ پیداکرد. نیـروی F_{43} و گشتاور T_{43} جایگـزین نیروی F_{43} در شکل ۸.۱۷ و شده است (شکـل ۸.۱۷ ز) بنابراین درشکل ۸.۱۷ و داریم:

$$F_{43}a = T_{43} = I_3\alpha_3$$

وبنابراین a بازوی گشتاور را می‌توان مطابق زیرتعیین کرد

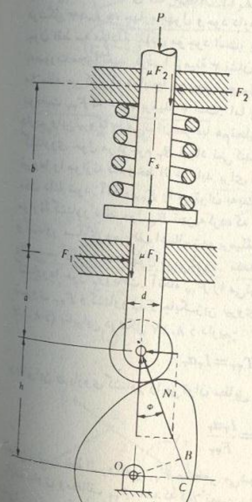
$$a = \frac{I_3\alpha_3}{F_{43}}$$

به‌این‌ترتیب خط اثـرواقعی F_{43} مشخص می‌شود. در نمودار جسم آزاد میلـهٔ ۳، F_{43} بایدمساوی ومخالف F_{34} باشدکه قبلاً تعیین شده‌است. حال F_{23} را می‌توان ازچندضلعی نیرو برای میلهٔ ۳ تعیین کرد.

نمودار جسم آزاد میلهٔ ۲ درشکل ۸.۱۷ ط نشان داده شده است. F_{32} مساوی و مخالف F_{23} است و F_{12} برای میلهٔ ۲ را می‌توان ازچندضلعی نیروتعیین کرد. سرانجام با جمع کردن گشتاورها حول نقطهٔ O_2، گشتاور T_2 راکه درنقطهٔ O_2 ازمحور بر لنگ ۲ وارد می‌شود می‌توان یافت.

مکانیسم بادامك

درسرعت زیاد، نیروی تماسی‌بین پیرو وبادامك ممکن‌است زیاد شود وسایش‌جدی به‌وجود آورد. نمونهٔ یك بادامك تخت بـا پیرو رفت وبر گشتی شعاعی درشکل ۹.۱۷ نشان‌داده



شکل ۹.۱۷

شده است. نیروهای مختلف به‌شرح زیرند.

$P =$ نیروی وارد برپیرو به‌وسیلهٔ جسم بالای آن (نشان داده نشده است) که پیرو آن را فعال می‌سازد.

$f =$ نیروی ماند پیرو

$W =$ نیروی وزن روی پیرو

$F_s =$ نیرویی که فنر برپیرو وارد می کند.

F_1 و $F_2 =$ نیروهای قائمی که بدنه برپیرو وارد می کند

$N =$ نیروهای قائمی که بادامك برپیرو وارد می کند

$\alpha =$ قسمت معلق پیرو

$b =$ فاصلهٔ بین سطوح یاتاقانها (برای یك تك‌یاتاقان، b برابرطول یاتاقان‌است).

$d =$ قطرساق پیرو

$\phi =$ زاویهٔ فشار

$\mu =$ ضریب اصطکاك بین پیرو وراهنمای آن

نیروهای P، f، W و F_s برخط مرکز پیرو وارد می‌شوند. فرض‌کنید F مجموع‌آنها را مشخص می‌سازد. پس

$$F = P + f + W + F_s \tag{۷.۱۷}$$

با جمع کردن نیروهای قائم روی پیرو خواهیم داشت

$$N\cos\phi = F + \mu(F_1 + F_2) \tag{۸.۱۷}$$

درجهت افقی

$$F_1 = F_2 + N\sin\phi \tag{۹.۱۷}$$

با جمع کردن گشتاورها حول نقطهٔ اعمال F_1 خواهیم داشت

$$F_2(b - \mu d) = Na\sin\phi + \frac{d}{2}(F - N\cos\phi) \tag{۱۰.۱۷}$$

با حذف F_1 و F_2 ازسه معادلهٔ آخر، نتیجه می‌شودکه

$$N = \frac{Fb}{b\cos\phi - (2\mu a + \mu b - \mu^2 d)\sin\phi} \tag{۱۱.۱۷}$$

این معادله نیروی قائم وارد بربادامك را برای هرموقعیت بادامك که درآن سرعت پیرو به‌طرف بالا باشد، به‌ما می‌دهد. ملاحظه می‌شود که ϕ و F با موقعیت زاویه‌ای بادامك تغییر می کنند. نیروهای اصطکاکی بـا بزرگ شدن زاویهٔ فشار اثـر قابل‌توجهی روی N

دارند. وقتی مخرج معادلهٔ (۱۱.۱۷) صفرشود N، به‌بینهایت میل خواهدکرد. ازاین‌رو مقدار حدی ϕ به‌شرح زیر یافته می‌شود:

$$b\cos\phi_m-(۲\mu a+\mu b-\mu^{۲}d)\sin\phi_m=۰$$

یا

$$\tan\phi_m=\frac{b}{\mu(۲a+b-\mu d)} \qquad (۱۲.۱۷)$$

نیروی ماند به‌جرم وشتاب پیرو بستگی دارد وبا معکوس شدن جهت شتاب، جهت نیرو هم معکوس خواهد شد. نیروی فنرباید همیشه آن‌قدر باشد تا پیرو را درتماس با بادامك نگه‌دارد. اگرنیروی فنر کافی نباشد، پیرو درسرعتهای بالا ازبادامك دورمی‌شود. این کاررا پرش نامند وهنگام بازگشت، پیرو با بادامك برخورد می‌کند و بار ضربه‌ای به‌وجود می‌آیدکه ممکن است باعث ارتعاش شود. فنرباید آنقدر فشار داشته باشدکه از تماس آن حتی در پایینترین موقعیت اطمینان حاصل شود. نیروی فنری معمولاً به‌وسیلهٔ یك فنر مارپیچی دارای سختی ثابت تأمین می‌شود. بنابراین نیروی فنرمتناسب با تغییر مکان خواهد بود. برای طراحی فنرباید منحنی نیروی خارجی P به‌همراه W نیروی وزن پیرو و f نیروی ماندبرحسب موقعیت بادامك رسم شود. بااستفاده ازاین منحنی‌می‌توان نیروی فنررا درموقعیتهای بحرانی تعیین‌کرد.

گشتاور لازم T برای به‌حرکت درآوردن بادامك را می‌توان با درنظرگرفتن شکل ۹.۱۷ به‌دست آورد، بنابراین

$$T=N(OB) \qquad (۱۳.۱۷)$$

چون نقطهٔ C مرکزآنی دوران است، پس سرعت پیرو

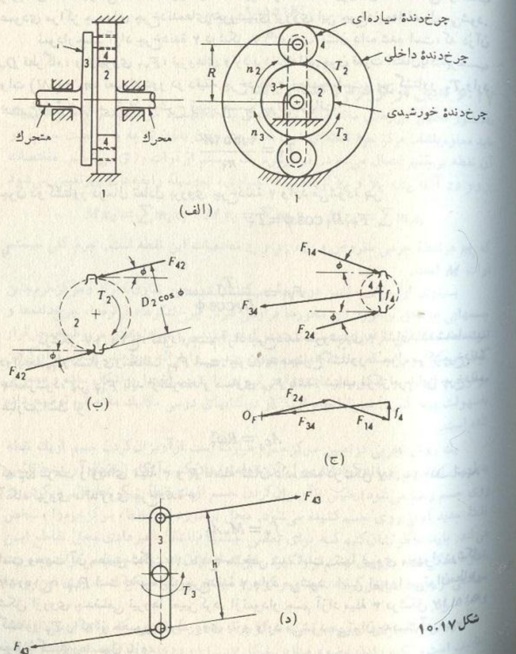
$$V=(OC)\omega \qquad (۱۴.۱۷)$$

معادله‌های (۱۱.۱۷) تا (۱۴.۱۷) برای بادامك باپیروخارج ازمرکزنیزمعتبرند. می‌توان دید که معادله‌های (۱۱.۱۷)، (۱۳.۱۷) و (۱۴.۱۷)، درصورت نادیده گرفتن اصطکاك بین پیرو وبادامك، برای بادامك با پیرورفت وبرگشتی سرتخت نیزاعتباردارند.

زنجیرچرخ‌دندهٔ خورشیدی

یافتن نیروهای دندانه روی قسمتهای مختلف زنجیرچرخ‌دندهٔ خورشیدی شکل ۱۰.۱۷ الف موردنظر است. چرخ‌دندهٔ ۲ محرك است وبا سرعت $n_۲$ r/min در جهت گردش عقربه‌های ساعت دوران می‌کند و $T_۲$ گشتاورمحرك درمحور چرخ‌دندهٔ ۲ است. بازو(میلهٔ

۳) عضو متحرك است و با سرعت $n_۳$ r/min دوران می‌کند. $T_۳$ گشتاور مقاومی است که درمحور متحرك (میلهٔ۳) وجود دارد. دراینجا ازچرخ‌دنده‌های ساده با دندانهٔاینولوت با زاویهٔ فشار ϕ استفاده می‌شود.



شکل ۱۰.۱۷

نمودار جسم آزاد هریك ازمیله‌های نشان داده شدهٔ ۲، ۳و۴ درشکل، کمکی برای تعیین نیروهای لازم برای موازنهٔ استاتیکی است. چون شتاب مرکزجرمهای این عضوها صفراست نیروهای ماند میله‌های ۱، ۲و۳ نیز صفر خواهد بود. چون زنجیر با سرعت زاویه‌ای ثابت کار می‌کند، گشتاورهای ماند نیزصفرند. اما نیروهای ماند ناشی از شتاب عمودی مراکز جرمهای چرخ‌دنده‌های خورشیدی برروی این چرخ‌دنده‌ها اعمال می‌شود.

نمودارجسم آزاد چرخ‌دندهٔ ۲ درشکل ۱۰.۱۷ ب نشان داده شده است، که درآن D_2 قطر گام، ودونیروی F_{42}، نیروهای وارد بردندانه‌اند. چون قدرت انتقال‌یافته برحسب وات (W) و n_2، تعداد دور در دقیقهٔ چرخ‌دندهٔ ۲ معلوم است، پس گشتاور T_2 وارد برچرخ‌دندهٔ ۲ را می‌توان به‌شرح زیربرحسب نیوتن‌متریافت:

$$T_2 = \frac{9{,}551W}{n_2}$$

چون دو گشتاور درحال تعادل برروی چرخ‌دندهٔ ۲ وارد می‌شود، پس

$$F_{42}D_2\cos\phi = T_2$$

یا

$$F_{42} = \frac{T_2}{D_2\cos\phi}$$

درشکل ۱۰.۱۷ ج، نمودارجسم آزاد چرخ‌دندهٔ خورشیدی ۴ نشان‌داده شده‌است. دراینجا F_{24} مساوی‌ومخالف F_{42} است. چون‌باید مجموع گشتاورها حول مرکزچرخ‌دندهٔ ۴ صفرشود، پس F_{14} باید ازنظرمقدار مساوی F_{24} باشد. شتاب مرکزجرم این چرخ‌دنده عبارت است از

$$A_{G_4} = R\omega_3^2$$

که ω_3 سرعت زاویه‌ای میلهٔ ۳ و R فاصلهٔ نشان داده شده در شکل ۱۰.۱۷ الف است. آنگاه نیروی ماند روی چرخ‌دندهٔ ۴

$$f_4 = M_4A_{G_4}$$

است وجهت آن مطابق شکل ۱۰.۱۷ ج مشخص شده است. تنها نیروی مجهول درشکل ۱۰.۱۷ ج، F_{34} است که برمرکز چرخ‌دندهٔ ۴ وارد می‌شود. این نیرورا می‌توان‌مطابق شکل ازروی چندضلعی نیروها تعیین کرد. ازنمودار جسم آزاد میلهٔ ۳ درشکل ۱۰.۱۷د، گشتاور T_3 راکه از محور محرك روی بازو وارد می‌شود می‌توان به‌دست‌آورد. برای موازنهٔ گشتاورها حول بازو،

$$T_3 = F_{43}h$$

T_3 (N.m) را نیزمی‌توان ازقدرت انتقال‌یافته تعیین کرد و n_3 تعداد دور در دقیقهٔ بازو به‌شرح زیر تعیین می‌شود:

$$T_3 = \frac{9{,}551W}{n_3}$$

۶.۱۷ تعیین مرکزجرم وگشتاور ماند

به‌منظور تحلیل نیروهای ماند وارد برمیله‌های یك مکانیسم، موقعیت مرکزجرم هرمیله باید معلوم‌باشد. مرکز جرم نقطه‌ای است که نیروی وزن بدون توجه به‌موقعیت جسم، در آن نقطه برجسم اعمال می‌شود. مرکزجرم یك سیستم از ذرات را G می‌نامیم. مختصات x و y و z آن، x_G، y_G و z_G ازیك مبدأ اختیاری، به‌وسیلهٔ رابطه‌های زیرتعیین می‌شود

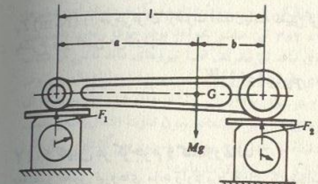
$$Mx_G = \sum m_ix_i \quad My_G = \sum m_iy_i \quad Mz_G = \sum m_iz_i$$

که m_i هرنقطهٔ جرمی مفروض و x_i، y_i و z_i مختصات این نقطه است. جرم کلی سیستم ذرات M است.

بسیاری ازاجزای ماشین درصفحهٔ حرکتشان دومحور تقارن دارند ومرکزجرم‌چنین جسمهایی درمحل برخورد این محورها قرارمی‌گیرد. چرخ‌لنگرها، قرقره‌ها، چرخ‌دنده‌ها و لغزنده‌ها، مثالهایی ازاین‌نوع‌هستند. هندبوکهای مهندسی، معادله‌های مربوط به‌محل‌قرار گرفتن مرکز جرم اجسام با شکلهای معروف هندسی را ارائه می‌دهند. مکان قرارگرفتن مرکزجرم اجسام با شکل غیرعادی را می‌توان با تقسیم‌آنها به‌اشکال ساده و معمولی به‌سهولت پیدا کرد. شیوهٔ انجام این کار درکتابهای درسی مکانیك مقدماتی توضیح داده شده است.

یك روش تجربی درتعیین مرکزجرم عبارت است ازآویزان‌کردن جسم ازیك نقطه به‌طوری که جسم بتواند آزادانه حول آن نقطه دوران‌کند. آنگاه ازنقطهٔ آویزخط قائمی روی جسم رسم می‌شود؛ سپس باآویزان‌کردن جسم ازیك نقطهٔ دیگرخط قائم دیگری از نقطهٔ جدید آویز روی جسم‌کشیده می‌شود. محل برخورد این‌خطها، مرکزجرم‌را مشخص می‌کند. باید خاطرنشان‌کنیم که برای بعضی جسمها بااشکال غیرعادی محل تقاطع این خطوط ممکن‌است درروی جسم‌قرارنگیرد. این به‌خاطرآن است که جسم می‌تواندبه‌صورت سیستمی ازجرمها درنظرگرفته شود ومرکزجرم سیستم جرمها ممکن است روی این‌جرمها واقع نشود.

روش دیگربرای تعیین موقعیت مرکزجرم به‌صورت تجربی، که برای برخی ازاعضا مناسب است، تکیه دادن عضو، مطابق شکل ۱۱.۱۷، روی دو ترازوست. کل جرم‌عضو



شکل ۱۱.۱۷

موردنظر M است که برمرکزجرم وارد می‌شود. قرائت ترازو برحسب کیلوگرم درشتاب ثقل ضرب می‌شود ومقادیر واکنشهای $F_۱$ و$F_۲$ را نتیجه می‌دهد. اگرگشتاورهای حول تکیه‌گاه سمت‌چپی را جمع‌کنیم، آنگاه

$$Mga = F_۲ l$$

وچون Mg، مجموع $F_۱$ و$F_۲$ است، پس

$$a = \frac{F_۲ l}{F_۱ + F_۲}$$

I گشتاورماند یك جسم حول یك محورمعین به‌صورت

$$I = \sum m_i r_i^۲$$

تعریف می‌شود، که m_i هرنقطهٔ جرمی جسم وr فاصلهٔ محور تا نقطهٔ جرم است. معمولاً گشتاورماند حول یك محور گذرنده‌ازمرکزجرم موردنظراست. اگراین مقدار را I بنامیم، آنگاه گشتاورماند حول یك محورموازی عبارت است از:

$$I_\circ = I + Md^۲$$

که M جرم کلی جسم وd فاصلهٔ بیـن محورهاست. معادلهٔ دوم به‌قضیهٔ محورهای موازی معروف است؛ کتابهای درسی مکانیك مقدماتی چگـونگی به‌کاربردن ایـن قضیه را برای اجسام مرکب‌حول هرمحورموردنظر، درصورت‌معلوم بودن گشتاورماند هرقسمت ازجسم حول محور گذرنده ازمرکزجرم آن قسمت توضیح می‌دهند.

یك روش تجربی برای تعیین گشتاور ماند یك‌جسم درشکل ۱۲.۱۷ نشان داده‌شده است. جسم درهرنقطهٔO، به‌جزمرکزجرم، روی یك لبهٔ تیغه نگه‌داشته می‌شود.اگرجسم

تغییرمکان ناچیزی به‌اندازهٔ θ بدهد و رها شود، حول نقطهٔ O نوسان می‌کند وبا مشاهدهٔ تعداد معینی ازنوسانها، درنهایت می‌توانیم گشتاور ماند را حـول G، مرکز جرم، تعیین کنیم.

رابطهٔ بین گشتاور حول نقطهٔ O وشتاب زاویه‌ای α، عبارت است از:

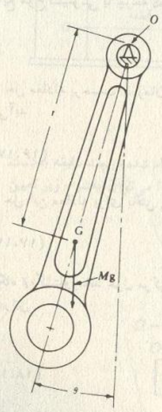
$$T_\circ = I_\circ \alpha \qquad (۱۵.۱۷)$$

یا

$$-Mgr\sin\theta = I_\circ \frac{d^۲\theta}{dt^۲}$$

کـه $r\sin\theta$ بازوی گشتاور نیـروی Mg است وعـلامت منفی، به‌این‌خاطر به‌کاربـرده می‌شودکـه گشتاور درجهت مخالف زاویهٔ θ است. اگـر θ کوچك باشد، سینوس زاویـه تقریباً مساوی خود زاویه برحسب رادیان خواهد بود ومعادلهٔ بـالا را می‌توان دوباره نوشت:

$$-Mgr\theta = I_\circ \frac{d^۲\theta}{dt^۲}.$$



شکل ۱۲.۱۷

یا

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+\frac{Mgr}{I_{\circ}}\theta=\circ$$

که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت است. این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی درجهٔ دوم است وجواب عمومی آن چنین است:

$$\theta=A\sin\sqrt{\frac{Mgr}{I_{\circ}}}t+B\cos\sqrt{\frac{Mgr}{I_{\circ}}}t$$

شرایط مرزی زمانی برقرارندکه $t=\circ$، $\theta=\theta_{max}$ و $d\theta/dt=\circ$ (سرعت زاویه‌ای صفر است) باحل معادله برای یافتن ثابتهای انتگرال، درمی‌یابیم که $A=\circ$ و $B=\theta_{max}$. بنابراین

$$\theta=\theta_{max}\cos\sqrt{\frac{Mgr}{I_{\circ}}}t$$

تابع موج کسینوسی یا چرخهٔ کامل خواهد بود هرگاه،

$$\sqrt{\frac{Mgr}{I_{\circ}}}t=۲\pi$$

با حل معادله برحسب t، زمان لازم برای یك چرخه که تناوب نامیده می‌شود، به‌دست می‌آید

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{I_{\circ}}{Mgr}} \qquad (۱۶.۱۷)$$

با حل این معادله برای یافتن $I_{\circ}$، خواهیم داشت:

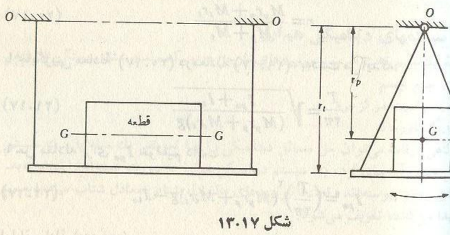
$$\boxed{I_{\circ}=Mgr\left(\frac{T}{۲\pi}\right)^{۲}} \qquad (۱۷.۱۷)$$

آنگاه I، گشتاورماند حول مرکزجرم را می‌توان به‌وسیلهٔ قضیهٔ محورهای موازی یافت. بنابراین

$$\boxed{\begin{aligned} I&=I_{\circ}-Mr^{۲}\\ &=Mr\left[\left(\frac{T}{۲\pi}\right)^{۲}g-r\right]\end{aligned}} \qquad (۱۸.۱۷)$$

دقت درتعیین I بستگی به‌دقت درتعیین T و r دارد. اگر دوجملهٔ اول درون کروشه تقریباً ازنظرمقدار مساوی باشند، وجود خطای ناچیزی درهریك از این جمله‌ها باعث بروز خطای زیادی در مقدار I می‌شود. به‌منظور کوچکتر کردن این خطا، بزرگ گرفتن T و کوچك گرفتن r باید موردنظر باشد. این کاررا می‌توان برای میلهٔ شکل ۱۲.۱۷، با آویختن آن ازانتهای دیگر، انجام داد.

گشتاور ماند یك قطعه را می‌توان به‌وسیلهٔ نگه‌داشتن آن روی یك‌آونگ، شامل یك میزسبك معلق با دوطناب، به‌دست‌آورد. برای تعیین گشتاور ماند این قطعه حول‌یك محور $G-G$ گذرا ازمرکزجرم، آن را روی میزقرار می‌دهیم. به‌طوری که محور $G-G$ مستقیماً زیرلولای $O-O$ وموازی محورآن باشد.



شکل ۱۳.۱۷

تناوب نوسانهای کوچك را می‌توان با شمردن نوسانهای انجام شده درچند دقیقه به‌دست آورد. گشتاورماند قطعه حول $G-G$، محورمرکزجرم آن، را می‌توان به‌شرح زیر تعیین کرد. فرض کنید

$M_p=$ جرم قطعه
$M_t=$ جرم میز
$r_p=$ فاصلهٔ O تا مرکز جرم قطعه
$r_t=$ فاصلهٔ O تا مرکزجرم میز
$I_{po}=$ گشتاورماند قطعه حول محور $O-O$
$I_{to}=$ گشتاورماند میزحول محور $O-O$
$T=$ تناوب میز با قطعه
$T_t=$ تناوب میزتنها

معادلهٔ (۱۶.۱۷)، تناوب میزبا قطعه روی‌آن را به‌ما می‌دهد، که I_o مجموع گشتاورهای ماند میزوقطعه حول محور $O-O$ و M جرم کلی میزوقطعه است. بنابراین

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_{po}+I_{to}}{(M_p+M_t)gr}}$$ (۱۹.۱۷)

که r فاصلهٔ $O-O$ تا مرکزجرم مجموع قطعه ومیزاست. کتابهای درسی مقدماتی‌مکانیک، یافتن r به‌وسیلهٔ گشتاورگیری استاتیکی حول $O-O$ را به‌شرح زیرتوضیح می‌دهند:

$$(M_p+M_t)r=M_pr_p+M_tr_t$$

یا

$$r=\frac{M_pr_p+M_tr_t}{M_p+M_t}$$ (۲۰.۱۷)

با جایگزینی معادلهٔ (۲۰.۱۷) درمعادلهٔ (۱۹.۱۷)، به‌دست می‌آیدکه

$$\frac{T}{2\pi}=\sqrt{\frac{I_{po}+I_{to}}{(M_pr_p+M_tr_t)g}}$$ (۲۱.۱۷)

با حل معادله برای I_{po} خواهیم داشت

$$I_{po}=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2(M_pr_p+M_tr_t)g-I_{to}$$ (۲۲.۱۷)

اما ازمعادلهٔ (۱۷.۱۷)

$$I_{to}=M_tgr_t\left(\frac{T_t}{2\pi}\right)^2$$

جایگزینی دومی در معادلهٔ (۲۲.۱۷) نتیجه می‌دهدکه

$$I_{po}=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2M_pgr_p+\frac{M_tgr_t}{4\pi^2}(T^2-T_t^2)$$ (۲۳.۱۷)

هرچند ازقضیهٔ محورهای موازی داریم:

$$I_{po}=I_p+M_pr_p^2$$ (۲۴.۱۷)

که I_p گشتاور ماند قطعه حول $G-G$، محور مرکز جرم است. با جایگزینی معادلهٔ (۲۴.۱۷) در (۲۳.۱۷)، خواهیم داشت:

$$I_p=M_pgr_p\left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2-\frac{r_p}{g}\right]+\frac{M_tgr_t}{4\pi^2}(T^2-T_t^2)$$ (۲۵.۱۷)

چون گشتاور ماند یك جسم حول یك محور معین به‌صورت مجموع جرم ذرات ضرب‌در مربع فاصلهٔ محور تا ذره تعریف می‌شود، پس بهتراست آن را به‌صورت زیربیان کنیم:

$$I=Mk^2$$ (۲۶.۱۷)

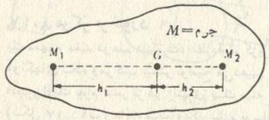
که M جرم‌کلی جسم و k یك ثابت به‌نام شعاع ژیراسیون است. به‌بیان دیگر، اگرتمام جرم جسم دریك نقطه با فاصلهٔ k از محور فرضی درنظرگرفته شود، آنگاه گشتاورماند چنین سیستمی مانندگشتاورماند همان جسم خواهد بود.

۷.۱۷ سیستمهای دینامیکی هم‌ارز

درمطالعهٔ یك‌جسم تحت اثرسیستم نیروهای‌خارجی دیدیم که مقدار شتاب بستگی داردبه:

۱. جرم جسم
۲. موقعیت مرکزجرم
۳. گشتاورماند

گاهی اوقات می‌توان حل مسائل دینامیکی را با تعویض یك میله با یك سیستم دینامیکی هم‌ارزآن ساده‌کرد، یك سیستم دینامیکی هم‌ارز به‌صورت دسته‌ای اجسام که به‌طور صلب به‌هم پیوسته‌اند وتحت‌تأثیر نیروهای یکسان، شتابی معادل شتاب میله یا جسم اصلی پیدا می‌کنند، تعریف می‌شود.



شکل ۱۴.۱۷

جسم نشان داده شده درشکل ۱۴.۱۷ دارای جسم M و گشتاورماند I حول‌مرکز جرم G است. بااینکه محدودیتی درتعداد جرمهای به‌کاررفته دریك سیستم هم‌ارز وجود ندارد، ولی ساده‌ترین سیستم ازدوجرم تشکیل می‌شود. چون سیستم هم‌ارز باید یك‌جسم صلب باشد، پس مطابق شکل‌آن را متشکل ازدوجرم نقطه‌ای M_1 و M_2 درنظرمی گیریم

که به‌وسیلهٔ یك میلهٔ فاقد جرم به‌هم متصل شده‌اند. برای‌اینکه دو جرم نقطه‌ای ازنظر دینامیکی با میلهٔ اصلی هم‌ارز باشند، باید معادله‌های زیربرآورده شوند:

$$\begin{aligned} M_{1}+M_{2}&=M \\ M_{1}h_{1}&=M_{2}h_{2} \\ M_{1}h_{1}^{2}+M_{2}h_{2}^{2}&=I \end{aligned} \qquad (۲۷.۱۷)$$

نخستین معادلهٔ (۲۷.۱۷) باید برآورده شود، چون:

$$\sum F=MA_{C}$$

یعنی اگرشتاب A_C مرکزجرم جسم باید برای سیستم هم‌ارز ومیله یکی باشد، پس هردو باید جرم‌کلی M یکسانی را دارا باشند. برای یکی بودن شتاب مرکزجرم دوسیستم، این مرکز باید موقعیت یکسانی داشته باشد وبنابراین معادلهٔ دوم نیزباید برآورده شود. به‌علاوه چون

$$\sum T=I\alpha$$

است وچون α برای هردو سیستم یکی است، پس I سیستم هم‌ارز باید با I میله مساوی باشد. این شرط به‌وسیلهٔ معادلهٔ سوم بیان شده است.

چهارمجهول M_1، M_2، h_1 و h_2 وجود دارند. یکی از این مجهولها را می‌توان فرض‌کرد وآنگاه سه‌مجهول دیگرازسه معادلهٔ (۲۷.۱۷) تعیین می‌شوند. به‌این نکته پی‌خواهیم برد که سیستم دینامیکی هم‌ارز مفهوم مفیدی در مطالعهٔ موازنهٔ مکانیسم لغزنده ـ لنگ درفصل بیستم است.

۸.۱۷ مرکز برخورد

یك مفهوم مفید درعلم دینامیك، نظریهٔ مرکزبرخورد است. نظریهٔ مرکزبرخورد را با آونگهای ساده ومرکب بیشتر توضیح می‌دهیم. یك آونگ ساده، مطابق شکل ۱۵.۱۷ الف، ازیك جرم متمرکز در انتهای یك میله باجرم ناچیز تشکیل شده است. جسمی که (شکل ۱۵.۱۷ب) مانند یك‌آونگ ساده نوسان می‌کند، اما جرم‌آن توزیع‌شده ومانند آونگ ساده دریك نقطه متمرکز نیست، آونك مرکب نامیده می‌شود. جرم یك‌آونگ را می‌توان درنقطه‌ای که تناوب نوسان غیرقابل تغییرباقی می‌ماند، متمرکزدرنظرگرفت. این نقطه مرکز برخورد نامیده می‌شود. تناوب آونگ ساده چنین است:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (۲۸.۱۷)$$

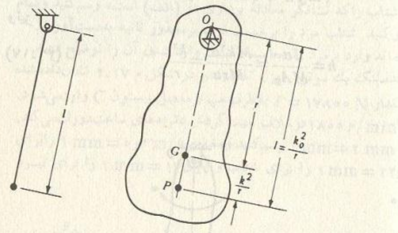
قبلاً درهمین فصل، تناوب آونگ مرکب به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۱۶.۱۷) بیان شد. یعنی

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_{o}}{Mgr}}=2\pi\sqrt{\frac{Mk_{o}^{2}}{Mgr}}=2\pi\sqrt{\frac{k_{o}^{2}}{gr}} \qquad (۲۹.۱۷)$$

M جرم‌آونگ و I_o گشتاورماند و k_o شعاع‌ژیراسیون حول نقطهٔ آویز O است اگرتناوب آونگ ساده را مساوی آونگ مرکب درنظر بگیریم، دراین‌صورت

$$l=\frac{k_{o}^{2}}{r} \qquad (۳۰.۱۷)$$

بنابراین اگر درشکل ۱۵.۱۷ ب، تمام جرم‌آونگ مرکب درنقطهٔ P متمرکزشود، آنگاه تناوب آن غیرقابل تغییر خواهد بود. نقطهٔ P نسبت به‌نقطهٔ O مرکز برخورد نامیده می‌شود، نمی‌توان مستقیماً درمورد مرکز برخورد یك جسم صحبت کرد بلکه همیشه باید آن‌را به‌نقطه‌ای دیگر ازجسم ارجاع‌داد. درشکل ۱۵.۱۷ ب، اگرتکیه گاه جسم‌نقطه‌ای دیگربود مرکزبرخورد نیز درنقطه‌ای سوای P قرار می‌داشت



(الف) (ب)

شکل ۱۷۰۱۵

اکنون فاصلهٔ مرکز جرم تا مرکز برخورد را تعیین می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی:

$$I_{o}=+IMr^{2}$$

که I گشتاورماند حول مرکزجرم است. اگر k را شعاع ژیراسیون حول مرکزجرم بگیریم، آنگاه

$$Mk_o^2 = Mk^2 + Mr^2$$

$$k_o^2 = k^2 + r^2$$

با جایگزینی رابطهٔ اخیر درمعادلهٔ (۳۰.۱۷)، داریم:

$$l = \frac{k^2}{r} + r$$

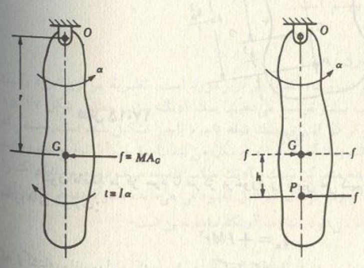
مشاهده می‌شود که فاصلهٔ مرکزجرم تا مرکزبرخورد، k^2/r است.

اگریک آونگ حول نقطهٔ آویز خود شتاب معین α داشته باشد، می‌توان نشان داد که یك نیرو درمرکز برخورد را می‌توان جایگزین نیرو و گشتاور ماندکرد. فرض کنید مطابق شکل، آونگ شکل ۶.۱۷ الف شتاب α داشته باشد، آنگاه نیروی ماند f بر G وارد می‌شود و ازنظرجهت مخالف $A_G = r\alpha$ است. همچنین یك گشتاورماند t با جهت مخالف α وجود دارد. نیروی f و گشتاور t مجدداً درشکل ۱۶.۱۷ ب نشان داده‌شده است. بنابراین

$$t = fh \quad \text{یا} \quad I\alpha = MA_G h$$

و نیز

$$h = \frac{I\alpha}{MA_G} = \frac{Mk^2\alpha}{Mr\alpha} = \frac{k^2}{r} \qquad (۳۱.۱۷)$$



(الف) (ب)

شکل ۱۶.۱۷

بنابراین درمی‌یابیم که h مساوی فاصلهٔ GP، که قبلاً آن را یافته بودیم، است. چون دو نیرو مساوی ومخالف هستند، پس باهم حذف می‌شوند و تنها اثرماند را می‌توان با یك نیروی f درمرکزبرخورد نشان داد. این بدان معنی است که اگریك آونگ مورد اصابت نیروی عمود برخط OG قرار گیرد، درصورت عبور ضربه ازمرکزبرخورد نیروی واکنشی درنقطهٔ آویز به‌وجود نخواهد آمد. یك مثال دراین مورد اثرسوزش دست است به‌هنگام ضربه‌زدن باچوگان‌درصورتی که توپ درنقطه‌ای غیرازمرکزبرخورد به‌چوگان اصابت کند.

مسائل

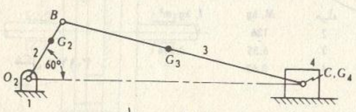
۱.۱۷ یك لوکوموتیوباسرعت ۵۵ mi/h روی یك مسیرمنحنی به‌شعاع ۴۰۰ ft به‌طرف راست حرکت می‌کند. مردی به‌جرم ۱۶۰ lb ازوسط ریل روبروی لوکوموتیو با سرعت ثابت ۵ ft/s نسبت به‌لوکوموتیو قدم می‌زند.

(الف) یك معادلهٔ برداری از شتاب این مرد بنویسید. درموقع نوشتن مؤلفه‌های شتاب، زیرنویس M را برای مرد و C را برای نقطهٔ ثابت متعلق به لوکوموتیو و در مکان قرارگرفتن مرد به‌کاربرید. ω_e را سرعت زاویه‌ای لوکوموتیو درنظر بگیرید.

(ب) نمودار شتاب راکه نشانگر معادلهٔ برداری در (الف) است، رسم کنید وتمام بردارها را نامگذاری کنید. شتاب مرد را برحسب فوت برمجذور ثانیه به‌دست‌آورید.

(ج) نیروی ماند وارد برمرد را محاسبه وجهت وارد شدن آن را توضیح دهید.

√۲.۱۷ مکانیسم لغزنده‌ـلنگ یك موتور دیزل تك‌سیلندر در شکل م ۲.۱۷ نشان‌داده شده است. نیروی گازبه‌مقدار $P = ۱۷۸۰۰$ N به‌طرف‌چپ برمفصل پیستون C واردمی‌شود. لنگ باسرعت ثابت ۱۸۰۰ r/min درخلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت‌دوران‌می‌کند. مکانیسم را بامقیاس ۱ mm = ۲ mm رسم‌کنید ومقیاس ۱ mm = ۰٫۳ m/s رابرای سرعت و ۱ mm = ۲۲٫۵ m/s² را برای شتاب و ۱ mm = ۱۷۵ N را برای نیرو به‌کاربرید.



	میله	M, kg	I, kg · m²
O_2B = 76.2 mm	2	2.26	0.00544
O_2G_2 = 50.8 mm	3	3.63	0.0408
BC = 286 mm	4	2.72	
BG_3 = 127 mm			

شکل م ۲.۱۷

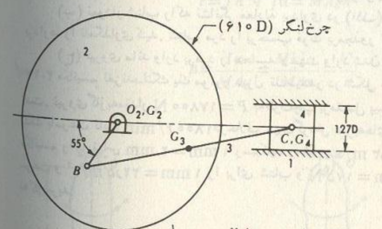
(الف) نیروهای $F_{۱۴}$ و $F_{۱۲}$ و گشتاور $T_۲$ را که برای تعادل از میل‌لنگ برلنگ وارد می‌شود برحسب نیوتن‌متر تعیین کنید.

(ب) مقدار و جهت نیروی لرزشی و موقعیت آن‌را از نقطهٔ $O_۲$ تعیین کنید.

۳.۱۷ مکانیسم لغزنده-لنگ به کاررفته در کمپرسور درشکل م ۳.۱۷ نشان‌داده شده است. چرخ لنگربه‌جای لنگ انجام وظیفه می کند. یک گشتاور خارجی وارد برمیل‌لنگ، چرخ لنگررا تقریباً باسرعت ثابت ۶۰۰ r/min درخلاف‌جهت گردش عقربه‌های ساعت به‌حرکت درمی‌آورد. فشارنسبی هوا برپیستون به‌طرف چپ، در این حال ۲۰۹۰۰۰ پاسکال است.

(الف) مکانیسم را با مقیاس ۱ mm = ۵ mm رسم کنید. مقیاس ۱ mm = ۰٫۱۲۰ m/s را برای سرعت، ۱ mm = ۶ m/s² را برای شتاب و ۱ mm = ۵۲٫۵ N را برای نیروبه کار ببرید. تحلیل مرکبی ازنیروهای ماند واستاتیکی به‌عمل آورید و مقدار گشتاور لازم $T_۲$ را برحسب نیوتن‌متر و جهت آن را که باید از میل‌لنگ روی لنگ وارد شود، تعیین کنید.

(ب) مقدار وجهت نیروی لرزشی وموقعیت آن را نسبت به $O_۲$ تعیین کنید.



O_2B = 152 mm
BC = 610 mm
BG_3 = 305 mm

میله	M, kg	I, kg · m²
2	136	
3	6.35	0.394
4	3.63	

شکل م ۳.۱۷

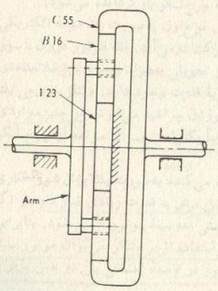
√ **۴.۱۷** بادامک شکل م ۸.۶ را درنظر بگیرید. بادامک با سرعت ثابت ۱۵ rad/s در خلاف‌جهت گردش عقربه‌های ساعت دوران می کند. بار وارد از میلهٔ بالایی (نشان داده نشده) برپیروکه پیروآن را فعال می کند ۲۲٫۲ N وجرم پیرو ۱ kg است. فنربا ثابت ۳٫۵ N/mm، درموقع قرار گرفتن پیرو درپایینترین موقعیت، نیرویی برابر ۱۷٫۸ N

روی پیرو وارد می کند. مکانیسم را با مقیاس واقعی در موقعیت نشان‌داده شدهٔ بادامک رسم کنید. سرعت وشتاب پیروبرای این‌موقعیت به‌ترتیب ۰٫۲۱۹ m/s و ۱۱٫۲ m/s² به‌طرف بالاست. در سیستم پیرو وبادامک نشان داده شده در شکل ۹.۱۷، $a = ۲۷٫۸$، $b = ۵۰٫۸$، $d = ۹٫۵۳$ میلیمتر و $\mu = ۰٫۱$ اختیارکنید. مطلوب است: (الف) نیروی قائم وارد بربادامک. (ب) مقدار حدی زاویهٔ فشار. (ج) گشتاور وارد ازمیل‌لنگ روی بادامک.

√ **۵.۱۷** در زنجیرچرخ‌دندهٔ خورشیدی شکل م ۵.۱۷، چرخ‌دنده‌ها دارای دندانهٔ اینولوت ۲۰° ومدول ۳ میلیمترند. بازوی محرك باسرعت ۲۰۰۰ r/min (موقعی که از راست به‌آن نگریسته شود) درخلاف‌جهت گردش عقربه‌های ساعت دوران می کند. A، چرخ‌دندهٔ ثابت است و دوچرخ‌دندهٔ خورشیدی B نیزوجود دارد، که‌جرم هرکدام ۲۲۷ kg و۰٫۰ است. چرخ‌دندهٔ داخلی C عضومتحرك است. ۳۷۳۰۰ W انتقال می‌یابد. فرض‌کنید بازده صددرصد باشد.

(الف) تعداد دور در دقیقه وجهت دوران C را (موقعی‌که از طرف راست به‌آن نگریسته شود) تعیین کنید.

(ب) تمام‌نیروهای روی‌هریك‌ازچرخ‌دنده‌ها راتعیین‌کنید. مقیاس ۱ mm = ۱۸ N را برای نیرو به کاربرید. همچنین گشتاور وارد ازمحور محرك روی بازو، گشتاور وارد از محور محرك روی چرخ‌دندهٔ C و گشتاور مقاوم وارد از بدنه روی چرخ‌دندهٔ A را برحسب نیوتن‌متر تعیین کنید.



شکل م ۵.۱۷

۶۰۱۷ به‌منظور تعیین گشتاورماند یك چرخ‌لنگر، آن راروی لبهٔ یك تیغهٔ گذرنده ازسوراخ ایجادشده درچرخ‌لنگر (که برای گذشتن محورازآن تعبیه‌شده) به‌حالت تعلیق درمی‌آوریم. قطرسوراخ ۵۰ mm وبنابراین فاصلهٔ تکیه گاه لبهٔ تیغه تا مرکزجرم ۲۵ mm است و چرخ‌لنگر ۱۰۰ نوسان را در ۱۹۸٫۵ s انجام می‌دهد. گشتاورماند جرمی چرخ لنگر حول محور گذرنده ازمرکزجرم را درصورتی‌که جرم چرخ‌لنگر ۴۰ kg باشد، تعیین کنید.

۷۰۱۷ میل رابط نشان داده شده مطابق شکل، (۱۲۰۱۷)، روی لبهٔ یك تیغه به حالت تعلیق درآمده‌و به‌آن اجازهٔ نوسان با زاویهٔ ناچیزی داده شده است. این میل رابط ۲۰۰ چرخه را در ۱۸۹ s کامل می‌کند. فاصلهٔ بین مراکز یاتاقانها روی هرطرف میله ۲۵۴ mm و فاصلهٔ r درشکل ۱۷۸ mm است. جرم میله ۱٫۰۲ kg است.

(الف) گشتاورماند میله را حول مرکزجرم خود برحسب کیلوگرم-مترمربع تعیین کنید.

(ب) اگر $M_۱$ درمرکز بالایی یاتاقان قرار گرفته باشد، سیستم هم‌ارز دوجرمی را برای میل رابط تعیین کنید.

(ج) موقعیت مرکزبرخورد میل رابط را حول لبهٔ تیغه پیداکنید.

۱۸

چرخ‌لنگرها

۱۰۱۸ مقدمه

چرخ‌لنگر، یك‌جرم دوار است که برای ذخیرهٔ انرژی درماشین به کارمی‌رود. انرژی‌جنبشی یك جسم دوار برابر $(۱/۲)I\omega^۲$ است که I گشتاور ماند حول محور دوران و ω سرعت زاویه‌ای محسوب می‌شود. اگر سرعت ماشین افزایش یابد، انرژی در چرخ‌لنگر ذخیره می‌شود و اگر سرعت کاهش یابد، انرژی به‌وسیلهٔ چرخ‌لنگر بازگردانده می‌شود.

در دونوع ماشین، چرخ‌لنگر به کار می‌رود. نوع‌اول به‌صورت یك مولد الکتریکی نشان داده می‌شود که با یك موتور احتراقی به‌حرکت درمی‌آید. یك موتور درون- سوز چهارزمانهٔ تك سیلندر را در نظر بگیرید. گشتاور تحویلی به‌مولد به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای متغیر است، چون در هر دو دور چرخش، یك ضربهٔ قدرت وجود دارد. ولتاژ خروجی یك مولد تابع سرعت است و تغییر ولتاژ باعث سوسوزدن چراغها می‌شود. در چنین‌مواردی برای اطمینان از تأمین سرعت و گشتاور تقریباً یکنواخت برای مولد، از چرخ لنگر استفاده می‌شود.

ماشین نوع دوم که از چرخ‌لنگر استفاده می‌کند، به‌صورت یك پرس سوراخکاری نشان داده می‌شود. فرایند سوراخکاری هنگام عمل برش به قدرت زیادی نیاز دارد و اگر از چرخ‌لنگر استفاده نشود، تمامی این‌قدرت بایستی به‌وسیلهٔ موتور تأمین شود. بنابراین موتور بزرگی مورد نیاز خواهد بود. درصورت استفاده ازچرخ‌لنگر می‌توان موتورنسبتاً کوچکتری به کار برد. علت ذخیرهٔ انرژی موتور در فاصلهٔ زمانی بین دو عمل برش و استفادهٔ آنی از این انرژی درحین انجام برش است.