2-1 مقدمه:

در بخش قبل میدان تنش در داخل یک محیط پیوسته بررسی شد. حال مید

مکان مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک جسم در حالت سه محوری در نظر گرفت

فرض می‌شود در اثر نیروهای خارجی نقطه A به 'A، B به 'B و... منتقل شده

شکل نهائی خود را پیدا کند، شکل (1-2). تغییر مکان نقاط A و B به ترتیب 'A

بوده و این تغییر مکانها ممکن است در اثر تغییر شکل (کرنش)، حرکت صلب (

و چرخش)، و یا ترکیبی از این دو باشد. وقتی در یک جسم کرنش اتفاق می

موقعیت نسبی نقاط آن تغییر یابد. اگر در جسم کرنش وجود نداشته باش

مکانهای 'AA و 'BB مربوط به حرکت صلب جسم خواهند بود. درحالت دوم

A و B ثابت باقی می‌ماند.

برای اینکه مقدار و جهت تغییر مکانها مشخص شود، لازم است در داخ

سیستم محورهای مختصات مبنا، مثل xyz در شکل (1-2)، انتخاب گردد. م

تغییر مکان در جهت‌های x، y و z به ترتیب با u، v و w نشان داده می‌شوند. ت

در هر نقطه از جسم شامل میدان تغییر مکان u (x,y,z) و v (x,y,z) و w (x,y,z) خ

در این کتاب تغییر مکانهای کوچک بررسی می‌شوند. کرنش‌های حاص

مکانهای کوچک نسبت به واحد کوچک هستند و از حاصلضرب (و ترمهای

صرفنظر می‌گردد.

فرض فوق منتهی به یک اصل مهم در مکانیک جامدات، به نام «اصل جای

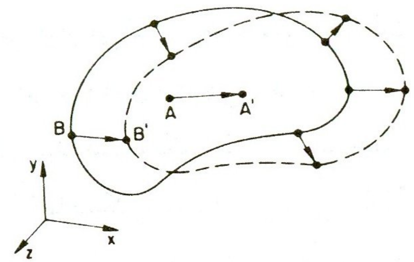
می‌شود. این اصل تا موقعی معتبر است که مقادیر تنش یا تغییر مکان تواب

از باری که آنها را ایجاد کرده‌اند باشند. در این صورت، اثر بارهای

---

of Super Position

یک جسم را می‌توان با تعیین اثر جداگانه هربار و جمع آنها بدست آورد. در این کتاب از این اصل بارها استفاده خواهد شد، وهدف جایگزین‌کردن بارهای مرکب به دو یا چند بار ساده است.



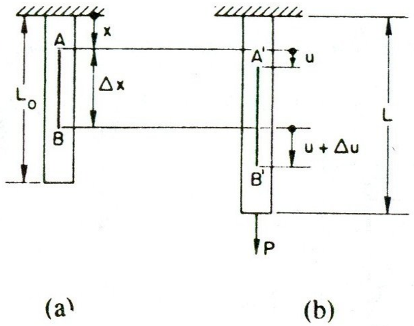
شکل (2-1)

2-2 روابط کرنش و تغییر مکان

میله‌ای مطابق شکل (2-2) تحت بار تک محوری قرار دارد. خط AB بطول Δx ، پس از اعمال بار به صورت $A'B'$ درمی‌آید. همانطور که در شکل نشان داده شده است، A به اندازهٔ u و B به اندازهٔ $u + \Delta u$ تغییر مکان یافته است. به عبارت دیگر نقطه B به اندازه Δu تغییر مکان اضافی نسبت به A دارد و در حقیقت طول Δx به اندازهٔ Δu ازدیاد یافته است. کرنش نرمال، تغییر طول واحد طول، به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{2-1}$$

در حد Δx به سمت صفر میل می‌کند و عبارت فوق کرنش در یک نقطه را به دست می‌دهد.



شکل (2-2)

اگر تغییر شکل بطور یکنواخت در طول اولیه پخش شده باشد، کرنش نرمال را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

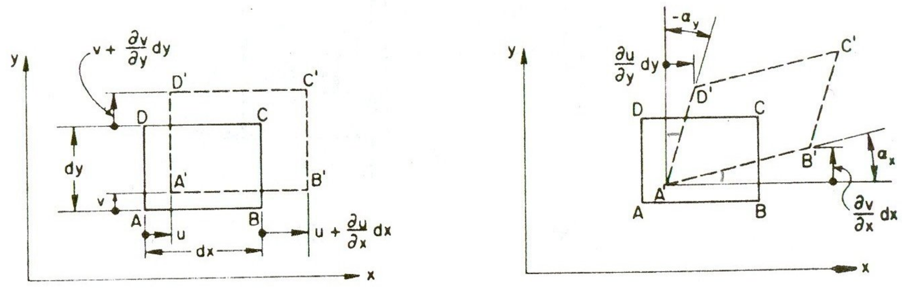
$$\varepsilon_{\circ} = \frac{L - L_{\circ}}{L_{\circ}} = \frac{\delta}{L_{\circ}} \tag{2-2}$$

که در آن L ، $L_{\circ}$ و δ به ترتیب طول نهائی، طول اولیه و تغییر طول میله هستند. وقتی تغییر مکان یکنواخت نباشد، این کرنش، کرنش متوسط میله خواهد بود.

حال، حالت دومحوری یا کرنش صفحه‌ای بررسی می‌شود، که در آن تمام نقاط جسم قبل و بعد از اعمال بار در یک صفحه باقی می‌مانند.

المانی به ابعاد dx ، dy و ضخامت واحد مطابق شکل (2-3) در نظر گرفته می‌شود.

تغییر شکل کلی المان را می‌توان ترکیبی از؛ تغییر طول اضلاع المان، شکل (2-3a) ، و چرخش نسبی اضلاع، شکل (2-3b) ، در نظر گرفت.



(a) (b)

شکل (2-3)

باتوجه به شکل (2-3a) و با استفاده از رابطهٔ (2-1) دوکرنش نرمال یا طولی در المان برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{a}$$

در کرنش نرمال علامت مثبت مربوط به ازدیاد طول و علامت منفی مربوط به کم شدن طول است.

حال تغییر زاویه قائم DAB ، شکل (2-3b) ، در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود زاویه α_x بین AB و $A'B'$ کوچک است و در نتیجه $\alpha_x \approx \frac{\partial v}{\partial x}$ خواهد بود، که د رآن

چرخش عکس عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود. با بحث مشابه $\alpha_y \approx \frac{\partial u}{\partial y}$ -است. تغییر کلی زاویه DAB، و یا تغییر زاویه جهت‌های x و y، کرنش زاویه‌ای، γ_{xy}، نامیده می‌شود و برابر است با؛

$$\gamma_{xy} = \alpha_x - \alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{b}$$

کرنش زاویه‌ای وقتی زاویهٔ قائم بین دو جهت مثبت (یا منفی) محورها کم می‌شود، مثبت است. به عبارت دیگر اگر زاویه بین x+ و y+ یا x- و y- کم شود، کرنش زاویه‌ای مثبت و در غیر اینصورت منفی خواهد بود.

تحلیل یک المان سه محوری، یا المانی به شکل مکعب مستطیل با اضلاع dx ، dy ، dz شبیه حالت دومحوری است، و در آن کرنش‌های نرمال و برشی برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2-3}$$

واضح است که تغییر زاویه بین جهت‌های x و y و جهت‌های y و x یکسان است. به عبارت دیگر $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ می‌باشد. به همین ترتیب در المان سه محوری نتیجه می‌شود؛

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad , \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad , \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \tag{c}$$

تقارن کرنش‌های برشی از رابطهٔ (2-3) نیز نتیجه می‌شود. عبارت (2-3) ، «روابط کرنش ـ تغییر مکان»، مکانیک پیوسته نامیده می‌شود. این روابط وقتی هندسه کرنش به جای علل بوجود آمدن آن مورد بررسی است، روابط سینماتیک نیز نامیده می‌شوند. رابطه (2-3) در نمادگذاری تانسوری به صورت زیر نشان داده می‌شود؛

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial ui}{\partial xj} + \frac{\partial uj}{\partial xi}\right) \quad (i, j = x , y , z) \qquad (2\text{-}4)$$

$u_z = w$

که در آن $u_x=u$ ، $u_y=v$ ، $x_x=x$ و... است. ضریب $\frac{1}{2}$ در رابطهٔ (2-4) روابط انتقال کرنش در نمادگذاری اندیسی را ساده‌تر می‌کند. در این حالت کرنش‌های نرمال وقتی $i=j$ ، و کرنش‌های برشی وقتی $i\neq j$ است بدست می‌آیند. از مقایسه روابط (2-3) و (2-4) نتیجه می‌شود؛

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad , \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \quad , \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \qquad (2\text{-}5)$$

همانطور که حالت تنش در یک نقطه با یک آرایه نه ترمی بیان شد، رابطهٔ (2-4) نشاندهنده نه کرنش در تانسور کرنش متقارن ($\varepsilon ij = \varepsilon ji$) زیر است؛

$$\varepsilon ij = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که سیستم محورهای کارتزین انتخاب شده بخش‌های 1 و 2 یکسان نیستند. در بخش 1، روابط استاتیک مربوط به جسم تغییر شکل یافته است، و سیستم محورها نیز برای جسم تغییر شکل یافته انتخاب شده‌اند. در اینصورت، xyz سیستم محورهای اولر[1] نامیده می‌شوند. و حال آنکه در این بخش برای تحلیل تغییر شکل، سیستم محورهای xyz برای جسم اولیه (بدون تغییر شکل) در نظر گرفته شده‌اند. در این حالت سیستم محورهای xyz ، سیستم محورهای لاگرانژ[2] نامیده می‌شوند. هرچند ایندو سیستم محورها یکی نیستند، فرض کوچک بودن تغییر شکل اجازه می‌دهد تا در هر دو روابط تنش و کرنش، محورهای x، y و z در حالت جسم بدون تغییر شکل در نظر

1- Eulerian Coordinate System

2- Lagrangian Cordinate System

گرفته شوند. انتخاب سیستم لاگرانژ جز در حالت تئوری تغییر شکل بزرگ، خطائی همراه نخواهد داشت. در تئوری تغییر شکل بزرگ، فرض‌های بحث شده معتبر نیستند، و فرموله کردن روابط مشکلتر و پیچیده‌تر خواهد بود.

در این کتاب، کرنش‌ها به عنوان مقادیر بی‌بعد نشان داده می‌شوند. در برخی موارد کرنش‌های نرمال برحسب متربرمتر و یا میکرومتر بر متر، و کرنش‌های برشی برحسب رادیان یا میکرورادیان نیز بیان می‌شوند. کرنش‌ها در مصالح مهندسی بندرت از 0.002 که معادل 2000×10^{-6} یا 2000μ است، تجاوز می‌کنند.

2-3 روابط سازش[1]

عبارت سازش دارای هر دو مفهوم ریاضی و فیزیکی است. از نقطه نظر ریاضی، این روابط نشان می‌دهند که u، v و w توابعی پیوسته و تک مقدار هستند. از نظر فیزیکی مفهوم این عبارت‌ها این است که جسم باید پیوسته و یک پارچه باشد. روابط سیستماتیک (2-3)، شش مؤلفه کرنش را به فقط سه مؤلفه تغییر مکان ارتباط می‌دهد. در نتیجه نمی‌توان همه مؤلفه‌های کرنش را بطور دلخواه به صورت توابعی از x، y و z نوشت. چون کرنش‌ها مستقل از هم نیستند، باید بین آنها روابطی وجود داشته باشد.

در کرنش دومحوری با دو مرتبه مشتق گرفتن از ε_x نسبت به y، ε_y نسبت به x، و γ_{xy} نسبت به x و y نتیجه می‌شود؛

$$\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

یا

$$\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y} \qquad (2\text{-}7)$$

1- Compatibility equations

این رابطه شرط سازش در مسألهٔ دومحوری است، که برحسب کرنش‌ها بیان شده است. روابط سازش در مسائل سه محوری با روشی مشابه بدست می‌آیند؛

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y} \quad , \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(- \frac{\partial \gamma yz}{\partial x} + \frac{\partial \gamma xz}{\partial y} + \frac{\partial \gamma xy}{\partial z} \right) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma yz}{\partial y \partial z} \quad , \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(+ \frac{\partial \gamma yz}{\partial x} - \frac{\partial \gamma xz}{\partial y} + \frac{\partial \gamma xy}{\partial z} \right) \qquad (2\text{-}8) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma xz}{\partial z \partial x} \quad , \quad 2\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(+ \frac{\partial \gamma yz}{\partial x} + \frac{\partial \gamma xz}{\partial y} - \frac{\partial \gamma xy}{\partial z} \right)
\end{aligned}
$$

برای درک بهتر روابط سازش، فرض می‌شود یک جسم الاستیک قبل از تغییر شکل به مکعب‌های کوچکی تقسیم شده باشد. پس از اعمال بار و تغییر شکل، مکعب‌ها به صورت چند وجهیهائی درخواهند آمد. این مجموعه تغییر شکل یافته وقتی می‌تواند با هم ترکیب شده و جسم اصلی را (در حالت تغییر شکل یافته) درست کنند که مؤلفه‌های کرنش در روابط سازش صادق باشند.

2-4 حالت کرنش در یک نقطه

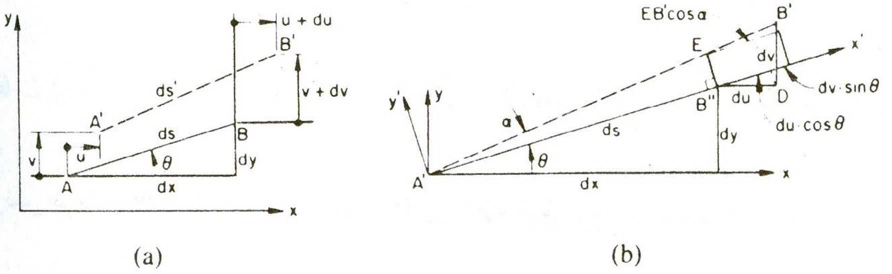
در بخش ۱ دیده شد که وقتی مؤلفه‌های تنش در یک نقطه داده شده باشند، می‌توان تنش‌ها روی هر صفحه‌ای راکه از آن نقطه می‌گذرد به دست آورد. روش مشابهی برای کرنش در یک نقطه وجود دارد.

یک المان خطی کوچک AB به طول ds در یک جسم بدون کرنش در نظر گرفته می‌شود، شکل (2-4a). تصویر خط روی محورهای مختصات dx و dy است. پس از اعمال کرنش، AB به $A'B'$ منتقل شده و طول آن ds' می‌شود. تغییر مکانها در جهت‌های x و y به ترتیب $u + du$ و $v + dv$ می‌باشند. تغییرات du و dv با استفاده از بسط کوتاه شده تیلور برابر خواهند شد با:

$$
du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy
$$

$$
dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \qquad (a)
$$

شکل (2-4b) تغییر مکان نسبی B به A و یا به عبارت دیگر کرنش AB را نشان می‌دهد. در این شکل AB طوری انتقال یافته است که A بر A' منطبق شود، و به حالت $A'B''$ درآید. در این حالت $B''D = du$ و $DB' = dv$ مؤلفه‌های تغییر مکان هستند. حال محورهای $x'y'$ طبق شکل انتخاب شده، و مؤلفه‌های کرنش نسبت به این محورها، $\varepsilon x'$، $\varepsilon y'$، $\gamma x'y'$، محاسبه می‌شوند.



شکل (2-4)

ابتدا کرنش $\varepsilon x'$ مربوط به ds' بررسی می‌شود. با تصویر du و dv روی محور x'، و با فرض $EB' \cos\alpha = EB'$ به علت کوچک بودن زاویه، نتیجه خواهد شد؛

$$EB' = du\,Cos\theta + dv\,Sin\theta \qquad (b)$$

طبق تعریف $\varepsilon x' = EB' / ds$ است. در نتیجه با استفاده از روابط (b) و (a)، کرنش $\varepsilon x'$ برابر خواهد شد با؛

$$\varepsilon x' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{ds}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} \right) Cos\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} \right) Sin\theta$$

با قراردادن $Cos\theta$ برای dx/ds، $Sin\theta$ برای dy/ds، و رابطهٔ (3-2) در رابطه بالا، نتیجه خواهد شد؛

$$\varepsilon x' = \varepsilon x\,Cos^2\theta + \varepsilon y\,Sin^2\theta + \gamma xy\,Sin\theta\,Cos\theta \qquad (c)$$

رابطهٔ (c) رابطهٔ انتقال برای کرنش نرمال جهت x است و با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توان آن را به صورت زیر نوشت؛

$$\varepsilon x' = \frac{\varepsilon x + \varepsilon y}{2} + \frac{\varepsilon x - \varepsilon y}{2} Cos2\theta + \frac{\gamma xy}{2} Sin2\theta \qquad (2\text{-}9a)$$

کرنش نرمال $\varepsilon y'$ با قرار دادن $\theta + \pi/2$ در رابطهٔ فوق برابر می‌شود با؛

$$\varepsilon_{y}' = \frac{\varepsilon x + \varepsilon y}{2} - \frac{\varepsilon x - \varepsilon y}{2} Cos2\theta - \frac{\gamma xy}{2} Sin2\theta \qquad (2\text{-}9b)$$

برای بدست آوردن $\gamma x'y'$ ابتدا زاویه چرخش AB (محور x')، α، محاسبه می‌شود. باتوجه به شکل (2-4b)؛

$$tg\alpha = B''E / ds$$

است، که در آن؛

$$B''E = dv\,Cos\theta - du\,Sin\theta - EB'Sin\alpha$$

می‌باشد. با فرض $Sin\alpha = tg\alpha = \alpha$، $EB'\,Sin\alpha = x'ds\alpha$ است. علت این امر این است که با فرض کوچک بودن $\varepsilon x'$ و α، حاصلضرب آنها قابل صرفنظر کردن می‌باشد. با قرار دادن روابط (a) و (3-2) در $B''E$، $\alpha = B''E / ds$ را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$\alpha = -(\varepsilon x - \varepsilon y)\,Sin\theta\,Cos\theta + \frac{\partial v}{\partial x} Cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y} Sin^2\theta \qquad (d)$$

زاویه چرخش y' با قرار دادن $\frac{\pi}{2} + \theta$ بجای θ در رابطهٔ (d) برابر می‌شود با؛

$$\alpha_{\theta+\pi/2} = -(\varepsilon_y - \varepsilon_x)\,Sin\theta\,Cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x} Sin^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y} Cos^2\theta \qquad (e)$$

حال با فرض اینکه جهت عکس عقربه‌های ساعت مثبت است، برای به دست آوردن $\gamma x'y'$، باید α و $-\alpha_{\theta+\pi/2}$ جمع شوند؛

$$\gamma x'y' = 2(\varepsilon y - \varepsilon x)\,Sin\theta\,Cos\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)(Cos^2\theta - Sin^2\theta) \qquad (f)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطهٔ (f) را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$\gamma x'y' = -(\varepsilon x - \varepsilon y)\,Sin2\theta + \gamma xy\,Cos2\theta \qquad (2\text{-}9c)$$

مقایسه روابط (7-1) و (9-2) نشان می‌دهد که روابط انتقال تنش‌ها و کرنش‌های دو محوری شکل یکسانی دارند. به عبارت دیگر با قراردادن ε به جای σ و $\gamma/2$ به جای τ روابط انتقال تنش به روابط انتقال کرنش تبدیل می‌شوند. در نتیجه با استفاده از رابطهٔ (8-1)، جهت‌های کرنش‌های اصلی $(\gamma x'y' = 0)$، از رابطه زیر بدست خواهند آمد؛

$$tg2\theta p = \frac{\gamma xy}{\varepsilon x - \varepsilon y} \qquad (2\text{-}10)$$

به طریق مشابه، کرنش‌های اصلی برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon x + \varepsilon y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon x - \varepsilon y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma xy}{2}\right)^2} \qquad (2\text{-}11)$$

در حالت سه‌محوری، روابط انتقال کرنش را می‌توان از روابط انتقال تنش با قراردادن ε به جای σ و $\gamma/2$ به جای τ بدست آورد. در این صورت با استفاده از رابطهٔ (1-25) نتیجه خواهد شد؛

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} ln \qquad (2\text{-}12)$$

دایرهٔ مور برای کرنش را می‌توان مشابه دایرهٔ مور برای تنش رسم کرد. در دایرهٔ مور برای کرنش، کرنش نرمال روی محور افقی رسم می‌شود و به طرف راست مثبت خواهد بود. وقتی کرنش برشی مثبت است، نقطه نشاندهنده کرنش محور x به فاصله $\gamma/2$ پائین خط ε، و نقطه محور y به فاصله $\gamma/2$ بالای خط ε رسم می‌شود. درحالت عکس کرنش برشی منفی است. توجه داشته باشید که این قرارداد فقط برای رسم و خواندن مقادیر کرنش برشی از دایرهٔ مور است، و با قرارداد مربوط به تنش، قسمت 7-1، توافق دارد. مثال زیر استفاده از دایرهٔ مور برای کرنش را نشان می‌دهد.

مثال 2-1

حالت کرنش در یک نقطه روی یک ورق فولادی به صورت زیر داده شده است؛

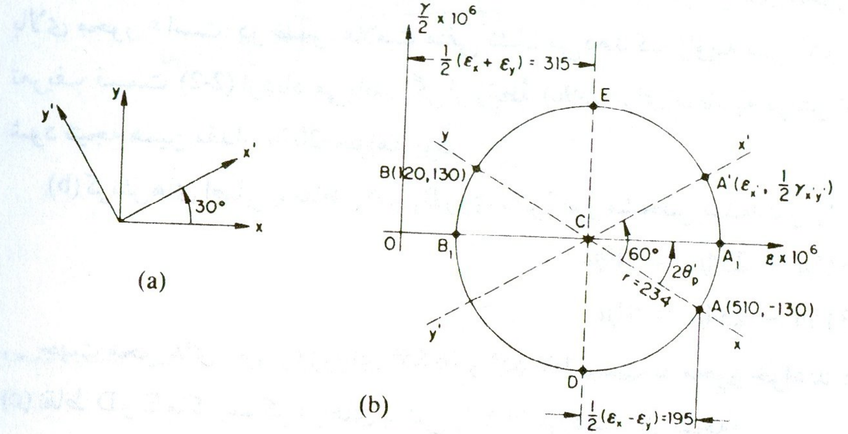
$$\varepsilon_x = 510\mu \quad , \quad \varepsilon_y = 120\mu \quad , \quad \gamma_{xy} = 260\mu$$

با استفاده از دایرهٔ مور برای کرنش؛

(a) حالت کرنش برای محورهای x'، y' را که زاویه $\theta = 30°$ با محورهای x و y می‌سازند، شکل (2-5a)،

(b) کرنش‌های اصلی و جهت‌های محورهای اصلی،

(c) ماکزیمم کرنش برشی و کرنش‌های نرمال روی صفحات آنها، را پیدا کنید.



شکل (2-5)

حل - دایرهٔ مور برای کرنش در شکل (2-5b) نشان داده شده است. مرکز دایره c، به فاصله $\frac{1}{2}(\varepsilon x + \varepsilon y)$ و A در $(\varepsilon x + \frac{1}{2}\ \gamma xy)$ قرار دارند. توجه شود که چون $\gamma_{xy/2}$ مثبت است، نقطه A که کرنش محور x را نشان می‌دهد باید پائین محور ε قرار گیرد (یا نقطه B بالای محور ε باشد). از شکل (2-5b)، شعاع دایره؛

$$r = (195^2 + 130^2)^{1/2}\ \mu = 234\mu$$

و زاویهٔ؛

$$2\theta'p = tg^{-1}\ (130/195) = 33.7°$$

خواهد شد.

(a) برای تعیین حالت کرنش محور x'، از محور x زاویه 60° (دو برابر گردش محورها) درجهت عکس عقربه‌های ساعت انتخاب می‌شود. زاویه $A'CA_1$ برابر $26.3° = 60° - 33.7°$ است و در نتیجه کرنش‌های $x'y'$ برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_{x'} = 315\mu + 234\mu \cos 26.3° = 525\mu$$

$$\varepsilon_{y'} = 315\mu + 234\mu \cos 26.3° = 105\mu$$

$$\gamma_{y'x'} = -2\,(234\mu \cos 26.3°) = -207\mu$$

کرنش برشی به این علت منفی است که نقطه نشان دهنده کرنش‌های محور x، A' بالای محور ε است. در ضمن علامت منفی نشان می‌دهد که زاویه بین x' و y' طبق تعریف قسمت (2-2) ازدیاد می‌یابد. اگر از رابطهٔ (2-9c) برای محاسبه کرنش استفاده شود نتیجه همین مقدار 207μ- خواهد بود.

(b) کرنش‌های اصلی با نقاط A_1 و B_1 روی دایرهٔ مور مشخص شده‌اند و برابرند با؛

$$\varepsilon_1 = 315\mu + 234\mu = 549\mu$$

$$\varepsilon_2 = 315\mu - 234\mu = 81\mu$$

جهت محورهای ε_1 و ε_2 زوایای $16.85°$ و $106.85°$ نسبت به محور خواهند داشت.

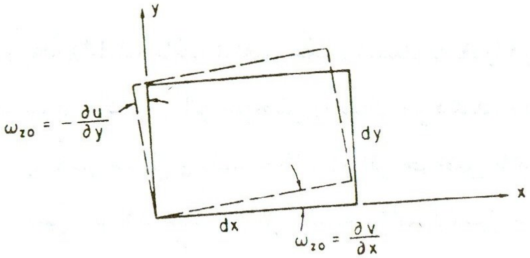
(c) نقاط D و E ماکزیمم کرنش‌های برشی را نشان می‌دهند. در نتیجه؛

$$\gamma_{max} = \pm\, 468\mu$$

از دایرهٔ مور دیده می‌شود که محور ماکزیمم کرنش برشی زاویه $45°$ نسبت به محورهای اصلی می‌سازد. کرنش‌های نرمال همراه با محور γ_{max}، روی دایره با OC نشان داده شده است و برابر 315μ می‌باشد.

2-5 تغییر مکانهای کلی

اگر مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت توابعی از x، y و z مشخص باشند، کرنش‌ها به سهولت از روابط کرنش ـ تغییر مکان به دست می‌آیند. در حالت عکس اگر مؤلفه‌های کرنش داده شده باشند، مؤلفه‌های تغییر مکان u، v و w کاملاً مشخص نخواهند شد. علت این امر آن است که در انتگرال‌گیری از روابط کرنش ـ تغییر مکان ثابت‌های انتگرال وجود دارند، و بطوریکه ذیلاً نشان داده خواهد شد، این ثابت‌ها معرف جابجائی صلب و چرخش صلب می‌باشند. روابط بین این جابجائی‌ها و چرخش‌ها با مؤلفه‌های تغییر مکان u، v و w در این قسمت بررسی می‌شود.



شکل (2-6)

اگر المان شکل (2-6) به اندازهٔ زاویه کوچک $\omega_{z°}$ چرخش صلب داشته باشد، نتیجه می‌شود؛

$$\omega_{z°} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (a)$$

واضح است که ضمن این چرخش صلب کرنش اتفاق نمی‌افتد.

اگر در المان جابجائی صلب و تغییر شکل (کرنش) هر دو وجود داشته باشد، ω_z به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2\text{-}13)$$

دیده می‌شود که ω_z متوسط تغییر مکان زاویه‌ای dx و تغییر مکان زاویه‌ای dy است و «چرخش»[1] نامیده می‌شود. بامراجعه به شکل (2-4) و رابطهٔ (a) قسمت (2-4)؛

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (b)$$

است. این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy$$

1- rotation

یا

$$du = \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dy - \omega_z dy \qquad (2\text{-}14)$$

دو ترم اول رابطهٔ (2-14) مؤلفه x تغییر مکان نسبت به A را در اثر مؤلفه‌های کرنش ε_x و γ_{xy} و ترم آخر تغییر مکان در اثر چرخش را نشان می‌دهند، شکل (2-7). در نتیجه اگر تغییر مکان در اثر تغییر شکل و تغییر مکان در اثر چرخش با هم ترکیب شوند، شکل نهائی المان مشخص خواهد شد. بطریق مشابه مؤلفه y تغییر مکان c نسبت به A برابر خواهد شد با؛

$$dv = \varepsilon y dy + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dx + \omega_z dx \qquad (2\text{-}15)$$

روابط (2-14) و (2-15) دیفرانسیل‌های کامل u و v هستند. اگر مؤلفه‌های کرنش (که روابط سازش را اضاء می‌کنند) داده شده باشند، با انتگرال گرفتن از این روابط u و v به دست خواهند آمد. در انتگرال‌گیری از این روابط، ثابت‌های انتگرال به صورت زیر ظاهر می‌شوند؛

$$u^* = u_\circ - \omega_{z\circ} y$$

(2-16)

$$v^* = v_\circ + \omega_{z\circ} x$$

توابع u^* و v^* طوری انتخاب شده‌اند که اگر به توابع تغییر مکان u و v اضافه شوند اثری در کرنش‌ها نخواهند داشت. در این توابع سه مقدار ثابت $u_\circ$ ، $v_\circ$ و $\omega_{z\circ}$ معرف مؤلفه‌های جابجائی صلب ($u_\circ$ و $v_\circ$) چرخش صلب ($\omega_{z\circ}$) هستند.

باید توجه داشت که ω_z در روابط (2-14) و (2-15) و $\omega_{z\circ}$ در رابطهٔ (2-16) با هم متفاوت هستند. $\omega_{z\circ}$ معرف چرخش صلب است، و حال آنکه ω_z چرخش یک المان کوچک در جسم را به عنوان تابعی از موقعیت المان بدست می‌دهد.

درحالت سه محوری du ، dv و dw برابر خواهند شد با؛

$$du = \varepsilon_x dx + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dy + \frac{1}{2}\gamma_{xz}dz - \omega_z dy + \omega_y dz$$

(2-17)

$$dy = \varepsilon_y dy + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dx + \frac{1}{2}\gamma_{yz}dz - \omega_x dz + \omega_z dx$$

$$dw = \varepsilon_z dz + \frac{1}{2}\gamma_{xz}dx + \frac{1}{2}\gamma_{yz}dy - \omega_y dx + \omega_x dy$$

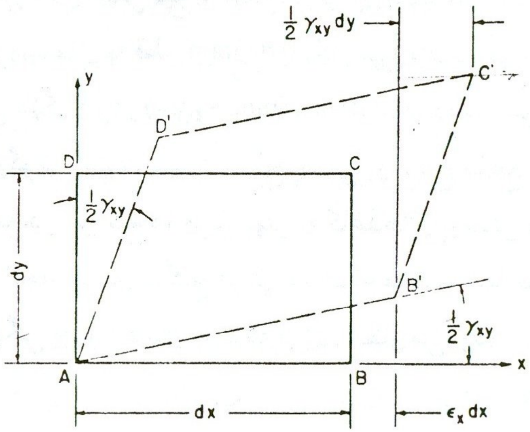
که در آن؛

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

چرخش‌ها حول محورهای x و y و z هستند، و مؤلفه‌های چرخش نامیده می‌شوند.



شکل (2-7)

در انتگرال‌گیری از روابط (2-17)، توابع دلخواه (ثابت‌های انتگرال) به صورت زیر خواهند بود؛

$$u^* = u_\circ - \omega_{z\circ} y + \omega_{y\circ} z$$

$$v^* = v_\circ - \omega_{x\circ} z + \omega_{z\circ} x$$

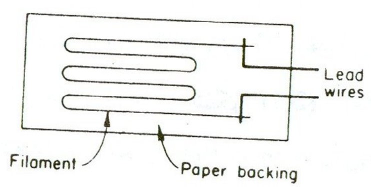
$$w^* = w_\circ - \omega_{y\circ} x + \omega_{x\circ} y$$

باید توجه داشت که جابجائی های صلب $u_\circ$ ، $v_\circ$ و $w_\circ$ و چرخش های صلب $\omega_{x\circ}$ ، $\omega_{y\circ}$ و $\omega_{z\circ}$ در مؤلفه های کرنش تأثیری نخواهند داشت. این حقیقت با قراردادن روابط (2-19) در روابط کرنش تغییر مکان (2-3) مشخص می شود.

2-6 اندازه گیری کرنش

روشهای مختلف مکانیکی، الکتریکی و نوری برای اندازه‌گیری کرنش در نقطه‌ای از یک سطح بکار می روند. یکی از متداولترین روش ها استفاده ازگیج‌کرنش است. گیج های کرنش از سیم های نازک یا فویل تشکیل شده‌اند. گیج سیمی یک شبکه‌سیم نازک است که بین دو ورق کاغذ مخصوص یا پلاستیک چسبانده شده است،شکل (2-8) پوشش های کاغذی یا پلاستیکی برای حمل گیج و همچنین برای چسباندن روی سطح فلز می باشد.

معمولاً در گیج سیمهای با قطر 0.025mm بکار می رود. در گیج های فویلی به جای سیم از فویل خیلی نازک فلزی (حدود 0.0025mm) استفاده می شود. چون مقطع فویل در گیج فویلی چهارگوش است، نسبت سطح جانبی به سطح مقطع آن بیشتر از سیمهای گرد است. در نتیجه در این گیج‌ها فویل بهتر به کاغذهای پوشش مـی چسبد، و پـخش حرارت در آن بهتر انجام می شود. گیج فویلی در انواع مختلف ساخته می شود و انتخاب نوع مناسب آن بستگی به نوع کاری دارد که از آن انتظار می رود.



شکل (2-8)

نسبت تغییر واحد مقاومت به تغییر واحد طول (کرنش) گیج «ضریب گیج»[1] نامیده می‌شود. فلزی که از آن رشته‌های گیج ساخته شده است فاکتور اصلی برای تعیین مقدار این ضریب است. کنستانتان،[2] آلیاژی با 60 درصد مس و 40 درصد نیکل، در گیج‌های سیمی یا فویلی بکار می رود و ضریب گیج آن تقریباً 2 است.

عملکرد گیج برمبنای تغییر مقاومت‌الکتریکی رشته‌ها در اثر تغییر کرنش است. وقتی سطحی که گیج روی آن چسبیده است تغییر شکل می دهد، باعث می شود که پوشش گیج و رشته‌ها نیز تغییر می‌کند. یک مدار پل الکتریکی با سیمهای قلعی در مسیر گیج قـرار داده مـی‌شود، تـا تـغییرات الکتریکی را بـه کـرنش تـبدیل کـند. پـل وتـیستون[3] مناسب‌ترین و دقیقترین پلی است که معمولاً بکار مـی‌رود و مـی‌توانـد کـرنش‌های بـه کوچکی 1μ را اندازه‌گیری نماید.

گیج‌های با ترکیبات خاص برای اندازه‌گیری کرنش در یک نقطه بکار می‌روند. این ترکیبات معمولاً شامل سه گیج است، و در نتیجه کرنش‌ها را در سه جهت مختلف به دست می‌دهد. معمولاً محورهای این سه گیج نسبت به هم زوایای $45°$ یا $60°$ دارد. با استفاده از ترکیبی از این گیج‌ها کرنش‌ها در سه جهت به دست می‌آید، و به کمک دایرهٔ مور برای کرنش می‌توان کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را بدست آورد.

مثال 2-2

برای بدست آوردن کرنش‌ها در نقطه‌ای از یک جسم تحت بار از رزت $60°$ استفاده شده است. رزت $60°$ شامل سه گیج سیمی است که در زوایای $0°$ ، $60°$ و $120°$ نـصب شده‌اند. داده‌های این رزت برابرند با؛

$$\varepsilon_0 = 190\mu \quad , \quad \varepsilon_{60} = 200\mu \quad , \quad \varepsilon_{120} = -300\mu \tag{a}$$

کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را بدست آورید.

حل ـ با استفاده از روابط انتقال کرنش، نتیجه خواهد شد؛

1- gage factor
2- Constantan
3- Wheatstone bridge

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{60} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{120} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

در نتیجه؛

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}[2\ (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) - \varepsilon_0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120})$$

با قراردادن مقادیر عددی، نتیجه می‌شود؛

$$\varepsilon_x = 190\mu \quad , \quad \varepsilon_y = -130\mu \quad , \quad \gamma_{xy} = 577\mu$$

کرنش‌های اصلی با استفاده از رابطهٔ (2-11) برابر می‌شوند با؛

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{190-130}{2}\mu \pm \mu\ [\ (\frac{190+130}{2})^2 + (\frac{577}{2})^2\ ]^{1/2}$$

$$= 304 \pm 330\mu$$

یا

$$\varepsilon_1 = 360\mu \quad , \quad \varepsilon_2 = -300\mu \qquad \text{(c)}$$

ماکزیمم کرنش برشی برابر خواهد شد با؛

$$\gamma_{max} = 2\mu\ [\ (\frac{190+130}{2})^2 + (\frac{577}{2})^2\ ]^{1/2} = \pm\ 660\mu$$

جهت محورهای اصلی با استفاده از رابطهٔ (2-10) بدست می‌آید؛

$$2\theta p = tg^{-1}\frac{577}{320} = 61° \quad \text{یا} \quad \theta'' = 120.5° \quad , \quad \theta' p = 30.5° \qquad \text{(d)}$$

وقتی $\theta' p$ در رابطهٔ (2-9) قرار داده می‌شود، کرنش برابر 360μ می‌گردد. در نتیجه $30.5°$ و $120.5°$ به ترتیب جهت‌های ε_1 و ε_2 هستند.

مسائل بخش دوم

2-1

نشان دهید که آیا میدان‌های کرنش زیر در یک جسم پیوسته امکان‌پذیر است؟

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} c\,(x^2 + y^2) & cxy \\ cxy & y^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} cz\,(x^2 + y^2) & cxyz \\ cxyz & y^2 z \end{bmatrix}$$

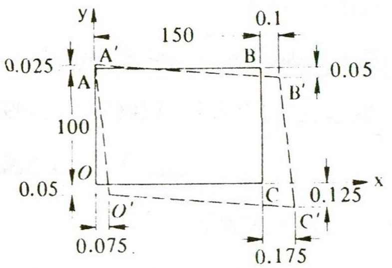
در هر دو حالت c ثابت کوچکی است و $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ می‌باشد.

2-2

یک ورق چهارگوش OABC به ابعاد 100×150mm به حالت O'A'B'C'، طبق شکل، تغییر شکل یافته است. تمام ابعاد نشان داده شده درشکل برحسب میلیمتر هستند؛

(a) مؤلفه‌های کرنش ε_x، ε_y و γ_{xy} را پیدا کنید.

(b) کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را بدست آورید.



شکل (م 2-2)