3-1 مقدمه:

در بخش اول روابط تعادل و در بخش دوم روابط کرنش ـ تغییر مکان مورد بررسی قرار گرفتند. این روابط با هم نه رابطه هستند و شامل پانزده مجهول (شش تنش، شش کرنش و سه تغییرمکان) می‌باشند. شش رابطه دیگر، روابط تنش ـ کرنش هستند که در این بخش بررسی می‌شوند.

روابط بین مؤلفه‌های تنش و مؤلفه‌های کرنش بستگی به خواص جسم مورد بحث دارند. در این بخش موادی مورد بحث قرار می‌گیرند که الاستیک هستند. اجسام الاستیک اجسامی هستند که پس از برداشتن بار به صورت اولیه خود برمی‌گردند. علاوه بر این قسمت اصلی بررسی در این بخش روی اجسام الاستیک ـ خطی متمرکز خواهد بود. بطوریکه در قسمت ذیل خواهد آمد، بیشتر مواد جامد در محدوده‌ای از تنش (یا کرنش) چنین رفتاری از خود نشان می‌دهند.

اجسام مورد بحث در این بخش علاوه بر الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپیک فرض می‌شوند. اجسامی همگن نامیده می‌شوند که خواص مکانیکی و فیزیکی آنها در همه نقاط یکسان باشد. در ضمن اگر خواص جسم در هر نقطه بستگی به جهت مورد بحث نداشته باشد، آن جسم ایزوتروپیک نامیده می‌شود.

3-2 رفتار مواد مهندسی

برای بررسی رفتار یک جسم معمولاً از آزمایش کشش استفاده می‌شود. قبل از بررسی یک آزمایش کششی، مجدداً خواص عمومی اجسام مورد بحث بیان می‌شود. بطوریکه در مقدمه نیز گفته شد، اجسام مورد بحث در این بخش همگن و ایزوتروپ فرض می‌شوند. اجسام همگن در همه نقاط خواص یکسانی دارند و علاوه بر این اگر

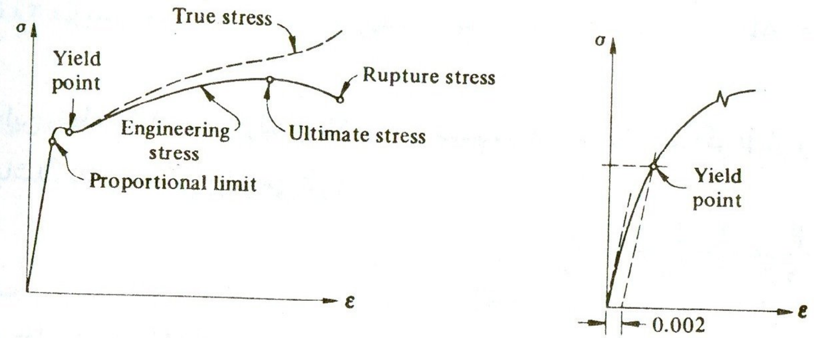
این خواص بستگی به جهت نداشته باشد این اجسام ایزوتروپ نامیده می‌شوند. یک جسم غیر ایزوتروپ، مثل چوب، در جهات مختلف خواص متفاوتی از خود نشان می‌دهند. یک کریستال از جسم، خاصیت غیر ایزوتروپی دارد، ولی وقتی تعداد زیادی از این کریستالها به صورت اتفاقی در داخل جسم قرار می‌گیرند، باعث می‌شوند عموماً جسم ایزوتروپیک باشد. برخی عملیات مهندسی مثل غلطک‌کاری سرد باعث می‌شوند که جسم تا حدودی غیر ایزوتروپیک شود، ولی این تغییرات معمولاً قابل توجه نیست و بررسی ایزوتروپیک نتایج مطلوبی در تحلیل نهائی جسم بدست می‌دهد.

یک جسم الاستیک پس از برداشتن بار به حالت اولیه خود برمی‌گردد. در بیشتر اجسام، در محدوده الاستیک رفتار تنش ـ کرنش خطی نیست، ولی در محدوده الاستیک، این اجسام نیز پس از بی‌بار شدن به حالت اولیه خود برمی‌گردند. وقتی جسمی تغییر شکل «پلاستیک» دارد، پس از بی‌بار شدن به حالت اولیه خود برنمی‌گردد و در آن تغییر شکل پس‌ماند باقی می‌ماند.

حال رفتار یک جسم باتوجه به آزمایش یک کشش استاتیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در آزمایش کشش استاتیک یک نمونه از جسم بین دو فک ماشین کشش بسته شده و به آرامی به آن بار وارد می‌شود. ضمن اعمال بار تغییر طول نمونه اندازه‌گیری می‌شود. معمولاً با داشتن مقدار بار و تغییر طول، تنش و کرنش مهندسی اندازه‌گیری شده و منحنی تغییرات این دو رسم می‌شود. «کرنش مهندسی» با رابطه (2-2) تعریف می‌شود. «تنش مهندسی» نسبت بار کشش (p) به سطح اولیه نمونه ($A_\circ$) است. در مقابل «تنش حقیقی» از تقسیم بار کشش به سطح واقعی نمونه در هر لحظه به دست می‌آید.

در شکل (3-1a) دو منحنی تنش ـ کرنش نشان داده شده است. منحنی خط پر بر مبنای تنش مهندسی و منحنی خط چین بر مبنای تنش حقیقی است. این نوع منحنی معمولاً از آزمایش اجسام نرم مثل فولاد به دست می‌آید. در این منحنی، بالاتر از حد تناسب «نقطه تسلیم» نشان داده شده است. در این نقطه ضمن ثابت ماندن بار تغییر طول

زیادی در جسم پدید می‌آید. پس از این نقطه منحنی تغییرات تا «تنش حد» ادامه می‌یابد و در «تنش شکست» جسم پاره می‌شود. علت پاره شدن جسم در تنشی کمتر از تنش حد، کاربرد تنش مهندسی است. اگر به منحنی تنش حقیقی توجه شود، پاره شدن در تنشی بالاتر از تنش حد اتفاق می‌افتد.



(a) (b)

شکل (3-1)

بیشترین فاصله بین منحنی‌های تنش مهندسی و تنش حقیقی وقتی اتفاق می‌افتد که تغییر شکل زیاد موضعی (کش آمدن[1]) در جسم اتفاق می‌افتد. واضح است که در این محل با توجه به تغییر شکل زیاد پلاستیکی سطح مقطع کم شده و کاربرد تنش مهندسی و کرنش مهندسی کافی نیست. بدین منظور باید «کرنش حقیقی» که کرنش لگاریتمی نیز نامیده می‌شود تعریف گردد. کرنش حقیقی، ε، به صورت زیر تعریف می‌شود؛

1- necking

$$\varepsilon = \int_{L_\circ}^{L} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_\circ} = \ln (1 + \varepsilon_\circ) \qquad (3\text{-}1)$$

در این رابطه L طول حقیقی، $L_\circ$ طول اولیه و $\varepsilon_\circ$ کرنش مهندسی است. برای کرنش‌های کوچک نتایج روابط (2-2) و (3-1) تقریباً برابر است. توجه داشته باشید که منحنی تنش حقیقی ـ کرنش حقیقی برای تحلیل رفتار پلاستیکی جسم مفیدتر است، و این رفتار در بخش دوازدهم بررسی خواهد شد. در محدوده پلاستیک فرض می‌شود جسم غیرقابل تراکم است، و در نتیجه حجم جسم ثابت فرض می‌گردد؛

$$A_\circ L_\circ = AL \qquad (a)$$

در این رابطه $A_\circ L_\circ$ حجم اولیه و AL حجم جسم در هر زمان است. اگر p بار وارد بر جسم باشد، تنش حقیقی برابر می‌شود با؛

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_\circ} \frac{L}{L_\circ} = \sigma_\circ \frac{L}{L_\circ}$$

با استفاده از رابطهٔ (2-2)، $L / L_\circ = 1+\varepsilon_\circ$، خواهد شد. در نتیجه؛

$$\sigma = \sigma_\circ (1+\varepsilon_\circ) \qquad (3\text{-}2)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تنش حقیقی برابر تنش مهندسی در یک به اضافه کرنش مهندسی است.

برای موادی که در آنها منحنی تنش ـ کرنش، نقطه تسلیم مشخصی را نشان نمی‌دهد، نقطه تقریبی تسلیم تعریف می‌شود. طبق روش «0.2 درصد جبرانی[1]»، کرنش 0.002 روی محور ε انتخاب شده و از آن خطی موازی خط مستقیم قسمت اولیه منحنی رسم می‌گردد، شکل (3-1b). محل تلاقی این خط و منحنی تنش ـ کرنش نقطه تسلیم نامیده می‌شود.

باتوجه به منحنی تنش ـ کرنش (شکل 3-1a)، شیب خط قسمت الاستیک ـ خطی،

1- 0.2- Percent offset method

«مدول الاستیسیته» E نامیده می‌شود. در نتیجه؛

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (3\text{-}3)$$

این ضریب نشان دهنده سفتی جسم است.

در آزمایش کشش، ازدیاد طول همراه باکم شدن سطح مقطع (کم شدن ابعاد جانبی) نمونه است. در حالت عکس اگر جسم تحت بار فشاری قرارگیرد، طول آن کم شده و در امتدادهای جانبی ابعاد آن زیاد می‌شود. آزمایش نشان می‌دهد که در محدوده الاستیک ـ خطی کرنش‌های جانبی (مثلاً درجهت‌های y و z)، به کرنش محوری (جهت x) وابسته‌اند. ضریب این وابستگی مقدار ثابتی است و ضریب پواسیون، ν، نامیده می‌شود، در نتیجه؛

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad (b)$$

3-3 قانون کلی هوک

در حالت تک محور رابطهٔ (3-3) بین تنش و کرنش حکمفرما است، و در محدوده الاستیک ـ خطی صادق است.

اگر بارگذاری در جهت محور x باشد، این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت؛

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

که قانون هوک نامیده می‌شود.

برای حالت سه محوری هریک از شش مؤلفه تنش تابعی خطی از شش مؤلفه کرنش خواهد بود. این رابطه قانون کلی هوک برای جسم همگن است. برای مثال؛

$$\varepsilon_x = c_1\sigma_x + c_2\sigma_y + c_3\sigma_z + c_4\tau_{xy} + c_5\tau_{yz} + c_6\tau_{zx} \qquad (a)$$

که در آن c_1 تا c_6 ثابت‌های الاستیک در جسم هستند: روابطی مشابه برای ε_y، ε_z، γ_{xy}، γ_{yz} و γ_{zx} می‌توان نوشت. برای یک جسم همگن مقدار این ثابت‌ها (c_1 و...) در تمام نقاط جسم یکی هستند. برای یک جسم همگن و ایزوتروپ می‌توان نشان داد که

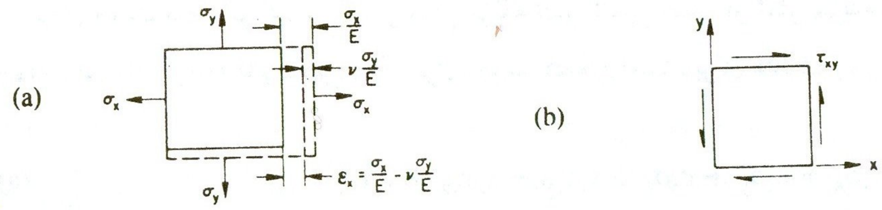
مجموعه 36 ثابت قانون کلی هوک به دوثابت تقلیل می‌یابد. قانون کلی هوک را می‌توان به صورت دیگر، که در آن تنش‌ها تابعی خطی از کرنش‌ها باشند، نیز نوشت.

در تحلیل زیر از نتایج آزمایشگاهی استفاده می‌شود، که نشان می‌دهد: یک تنش نرمال (σ_x) کرنش برشی ایجاد نمی‌کند، و یک تنش برشی (τ_{xy}) فقط کرنش برشی (γ_{xy}) در جسم ایجاد می‌نماید. علاوه بر این با فرض کوچک بودن تغییر مکانها، در این تحلیل از اصل جایگزینی استفاده می‌شود.

المانی از یک جسم همگن و ایزوتروپ مطابق شکل (3-2a) تحت تنش دومحوری در نظر گرفته می‌شود. ضخامت المان واحد فرض می‌شود. در اثر تنش σ_x، کرنش $\frac{\sigma x}{E}$ در جهت x، و $-\frac{\nu\sigma x}{E}$ در جهت y ایجاد می‌شود. بطریق مشابه در اثر تنش σy، کرنش در جهت y، $\frac{\sigma y}{E}$ و در جهت x، $-\frac{\nu\sigma y}{E}$ خواهد بود. وقتی این دو تنش همزمان روی المان اثر می‌کنند، باتوجه به اصل جایگزینی، کرنش‌ها برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\,\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\,\frac{\sigma_x}{E}$$



شکل (3-2)

درحالت برش خالص، شکل (3-2b)، در محدوده الاستیک خطی، رابطهٔ تنش و کرنش به صورت زیر است؛

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau xy}{G}$$

که در آن G «مدول الاستیسیته برشی» نامیده می‌شود.

درحالت سه محوری، با تحلیل مشابهی، قانون کلی هوک برای اجسام همگن، ایزوتروپ، و الاستیک ـ خطی به صورت زیر بدست می‌آید؛

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma y + \sigma z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau xy}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma x + \sigma z\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau yz}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma x + \sigma y\right)\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau zx}{G}$$

بطوریکه در ذیل نشان داده خواهد شد، ثابت‌های E ، ν و G در رابطهٔ (3-4) بهم وابسته‌اند و در حقیقت در این روابط فقط دو ثابت مستقل وجود دارد. بدین منظور المانی تحت برش خالص، شکل (3-2b) ، در نظر گرفته می‌شود. در قسمت (5-1) نشان داده شد که برای این المان تنش‌های اصلی در امتدادهای x' و y' (با زاویه $45°$ نسبت به صفحات برشی) وارد می‌آیند و برابرند با؛

$$\sigma_{x'} = \tau_{xy} \quad , \quad \sigma_{y'} = -\,\tau_{xy}$$

با استفاده از قانون هوک، کرنش در جهت x' برابر خواهد شد با؛

$$\varepsilon x' = \frac{\sigma x'}{E} - \nu\,\frac{\sigma y'}{E} = \frac{\tau xy}{E}\,(1+\nu) \qquad \text{(b)}$$

ازطرفی چون در برش خالص $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ است، با استفاده از رابطهٔ (9-2) ، برای $\theta = 45°$ ، $\varepsilon x' = \frac{\gamma xy}{2}$ خواهد شد. در نتیجه؛

$$\varepsilon_x{}' = \frac{\tau xy}{2G} \qquad \text{(c)}$$

با مساوی قرار دادن روابط (b) و (c) نتیجه می‌شود؛

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{3-5}$$

برای هر زاویه θ این رابطه صادق است. درنتیجه اگر برای یک جسم دوثابت از سه ثابت E، ν و G به صورت آزمایشی بدست آیند، به کمک رابطهٔ (3-5) می‌توان ثابت سوم را به دست آورد. بااستفاده از روابط (3-4) و (3-5) قانون کلی هوک رامی توان به صورت زیر نوشت؛

$$\sigma_x = 2G\varepsilon x + \lambda e \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon y + \lambda e \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon z + \lambda e \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

که در آن؛

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{3-7}$$

و

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} \tag{3-8}$$

است.

مدول برشی G و ثابت λ، به نام ثابت‌های لیم[1] نامیده می‌شوند.

e در رابطه (3-7) دارای یک مفهوم فیزیکی است. اگر المانی با حجم اولیه $V_\circ = dxdydz$ تحت تنش قرار گیرد، حجم نهائی آن برابر خواهد شد با؛

$$V_f = (1+\varepsilon_x)\,dx.\,(1+\varepsilon_y)\,dy.\,(1+\varepsilon_z)\,dz$$

تغییر حجم این المان $\Delta V = V_f - V_\circ$ است و با صرفنظر کردن از ترمهای مرتبه بالا، برابر خواهد شد با؛

$$\Delta V = V_f - V_\circ = V_\circ\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

یا؛

$$\Delta V = V_\circ e$$

در نتیجه؛

1- Lame constants

$$e = \frac{\Delta V}{V} \tag{d}$$

e تغییر حجم واحد حجم است و انبساط[1] نامیده می‌شود. انبساط را می‌توان برحسب مؤلفه‌های تنش نوشت. دراینصورت؛

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{3-9}$$

برای مثال، المان مکعبی شکل تحت فشار هیدرواستاتیک p در نظر گرفته می‌شود. در این حالت میدان تنش به صورت زیر است؛

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

در نتیجه رابطهٔ (3-9) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$e = -\frac{3\,(1-2\nu)}{E}\,p$$

ضریب؛

$$k = -\frac{p}{e} = \frac{E}{3\,(1-2\nu)} \tag{3-10}$$

بنام ضریب انبساط حجمی یا مدول الاستیسیته حجمی[2] نامیده می‌شود. از رابطهٔ (3-10) پیدا است که برای اجسام غیرقابل انبساط، $e = 0$، ضریب پواسیون $\nu = \frac{1}{2}$ می‌باشد. برای همه اجسام طبیعی $\nu < \frac{1}{2}$ می‌باشد.

در جدول (3-1) خواص مکانیکی متوسط برخی مواد آورده شده است. این ارقام مقادیر متوسط هستندو با تغییر ترکیبات جسم، عملیات حرارتی و غیره تغییر می‌کنند.

رابطه بین ثابتهای الاستیک ارائه شده در این بخش در مسأله 3-9 آورده شده است.

1- dilatation 2- bulk modulus of elasticity

Material	Specific weight (kN/m^3)	Modulus of elasticity (GPa) tension	Modulus of elasticity (GPa) shear	Yield stress (MPa) tension	Yield stress (MPa) shear	Ultimate stress (MPa) tension	Ultimate stress (MPa) shear	Coef. of thermal expansion (10^{-6} per °C)
Aluminium alloy								
6061-T6	26.6	70	25.9	241	138	290	186	23.6
2024-T4	27.2	73	27.6	290	172	441	276	23.2
Brass	82.5	103	41	103		276	193	18.9
Bronze	87	103	45	138		345	241	18
Copper	80.6	117	41	245		345	345	16.7
Cast iron	72.3	103	41			138	207	10.8
Magnesium alloy	17.6	45	16.5	138		262	131	25.2
Steel								
mild	77	200	79	248	165	410–550	331	11.7
high strength	77	200	79	345	172	483		11.7

جدول (3-1)

3-4 انرژی کرنشی

کار انجام شده توسط نیروهای خارجی که باعث تغیر شکل الاستیک در جسم می‌شوند، به صورت انرژی کرنشی در داخل جسم ذخیره می‌گردد. در یک پروسس الاستیک ایده‌آل، تلفات انرژی صفر است و تمام انرژی ذخیره شده در موقع بی‌بارکردن برگشت‌پذیر است.

برای تحلیل انرژی کرنشی، یک مکعب مستطیل به ابعاد dx ، dy ، dz در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود این المان تحت تنش تک محوری، σx ، قرار دارد، شکل (3-3a). اگر تنش به آرامی به جسم وارد آید، در هر لحظه تعادل استاتیک برقرار خواهد بود. برای برآورد کار انجام شده توسط σx روی هر رویهٔ المان، باید توجه داشت که تغییر

مکان تنش‌ها متفاوت است. واضح است که کار انجام شده توسط دو نیروی مخالف (σxdydz) در تغییر مکان مثبت (u) همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین کار خالص انجام شده توسط نیروی (σxdydz) روی المان برابر است با؛

$$dW = dU = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma x \; d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dydz = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma x \; d\varepsilon x \; (dxdydz)$$

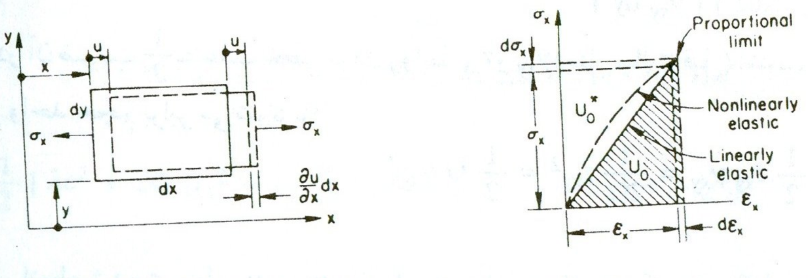
که در آن؛

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon x$ ، dW کار انجام شده روی dxdydz ، و dU ازدیاد انرژی کرنشی درالمان است. با نشان دادن انرژی کرنشی واحد حجم (دانسیته انرژی کرنشی) به صورت $U_\circ$ ، برای یک جسم الاستیک خطی نتیجه می‌شود؛

$$U_\circ = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma x d\varepsilon x = \int_0^{\varepsilon_x} E\varepsilon x d\varepsilon x \qquad (a)$$

پس از انتگرال‌گیری این رابطه به صورت زیر درمی‌آید؛

$$U_\circ = \frac{1}{2} E\varepsilon x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \qquad (3\text{-}11)$$



(a) (b)

شکل (3-3)

$U_\circ$ طبق رابطهٔ (3-11)، برابر سطح هاشورزده شکل (3-3b) است. سطح بالای منحنی تنش-کرنش، دانسیته انرژی تکمیلی نامیده می‌شود، و برابر است با؛

$$U_\circ^* = \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon x \, d\sigma x \qquad (3\text{-}12)$$

برای یک جسم الاستیک-خطی $U_\circ = U_\circ^*$ است، ولی برای یک جسم غیرخطی همانطور که در شکل (3-3b) نشان داده شده است، این دو مقدار برابر نخواهند بود.

اگر تنش‌های نرمال σx، σy و σz بطور همزمان به جسم وارد آیند، انرژی کرنشی کلی جمع انرژی کرنشی در اثر هر تنش خواهد بود. علت این امر آن است که هر تنش نرمال، مثلاً σx، در اثر تغییر شکل در جهت‌های دیگر کاری انجام نمی‌دهد. در نتیجه انرژی کلی کرنشی برای واحد حجم برابر می‌شود با؛

$$U_\circ = \frac{1}{2}\left(\sigma x \varepsilon x + \sigma y \varepsilon y + \sigma z \varepsilon z\right) \qquad (b)$$

برای تحلیل انرژی کرنشی دراثر تغییر شکل برشی، المانی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد dx، dy، dz، تحت تنش برشی τ_{xy} در نظر گرفته می‌شود، شکل (3-4). بطوریکه از شکل پیدا است، نیروی $\tau_{xy} dxdz$ تغییر مکان $\gamma_{xy} dy$ دارد. در نتیجه انرژی کرنشی برابر می‌شود با؛

$$\frac{1}{2}\left(\tau_{xy} dxdz\right)\left(\gamma_{xy}\, dy\right)$$

که در آن ضریب $\frac{1}{2}$ به علت خطی بودن روابط τ_{xy} و γ_{xy} (مثل حالت قبل) است، انرژی کرنشی واحد حجم برابر می‌شود با؛

$$U_\circ = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 \qquad (3\text{-}13)$$

چون کار انجام شده توسط γ_{xz} و γ_{yz} صفر است، دانسیته انرژی کرنشی کلی در اثر تنش‌های برشی جمع انرژی کرنشی برای هر تنش است. در نتیجه؛

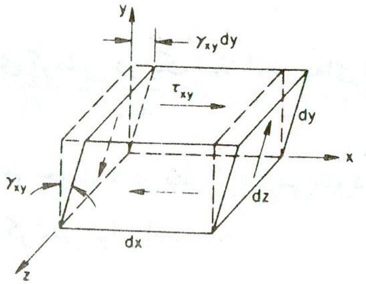
$$U_\circ = \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \qquad (c)$$

برای حالت کلی تنش، دانسیته انرژی کرنشی جمع روابط (b) و (c) خواهد بود؛

$$U_\circ = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \qquad (3\text{-}14)$$

با استفاده از قانون هوک، رابطهٔ (3-14) را می‌توان برحسب تنش‌ها به صورت زیر تنظیم کرد؛

$$U_\circ = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) \qquad (3\text{-}15)$$



شکل (3-4)

شکل دیگر رابطهٔ (3-14)، برحسب کرنش‌ها، به صورت زیر است؛

$$U_\circ = \frac{1}{2}\left[\lambda e^2 + 2G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + G\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right)\right] \qquad (3\text{-}16)$$

که در آن λ و e با روابط (3-8) و (3-9) داده شده‌اند.

از روابط فوق نتایج زیر بدست می‌آید؛

$$\frac{\partial U_\circ(\tau)}{\partial \tau_{ij}} = \varepsilon_{ij}\ ,\quad \frac{\partial U_\circ(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij}\ ,\quad (i, j = x, y, z) \qquad (3\text{-}17)$$

که در آن $U_\circ(\tau)$ و $U_\circ(\varepsilon)$ دانسیته انرژی کرنشی برحسب تنش و کرنش، روابط (3-15) و (3-16)، می‌باشند. کاربرد این روش در بخش «روشهای انرژی» دنبال خواهد شد.

برای بدست آوردن انرژی کلی کرنشی در یک جسم، کافیست از دانسیته انرژی کرنشی، روی حجم جسم، V انتگرال گرفته شود. در نتیجه؛

$$U = \int_V U_\circ dv = \int\int\int U_\circ \, dxdydz \qquad (3\text{-}18)$$

توجه داشته باشید که انرژی کرنشی تابع خطی بار یا تغییر شکل نیست. در نتیجه اصل جایگزینی برای انرژی کرنشی قابل استفاده نیست (به مسأله 3-12 مراجعه شود).

مثال 3-1

عبارتی برای انرژی کرنشی در یک میله استوانه‌ای تحت کوپل پیچش M_t در دو انتها بدست آورید.

حل ـ محور میله در جهت x در نظر گرفته می‌شود. چون حالت تنش، برش خالص است، دانسیته انرژی کرنشی برابر است با؛

$$U_\circ = \tau^2 / 2G$$

از طرفی طبق رابطه پیچشی $\tau = M_t\, r/J$ است. در نتیجه انرژی کرنشی کلی میله برابر می‌شود با؛

$$U = \int \frac{M_t^2}{2GJ^2} \left[\int \int r^2 \, dydz \right] dx$$

عبارت داخل کروشه، ممان قطبی سطح، J، است. درنتیجه؛

$$U = \int \frac{M_t^2 \, dx}{2GJ} \qquad (3\text{-}19)$$

که در آن انتگرال باید در طول میله گرفته شود.

3-5 اجزاء انرژی کرنشی

اگر حالت کلی تنش، شکل (3-5a)، ترکیبی از دو حالت (3-5b) و (3-5b) در نظر گرفته

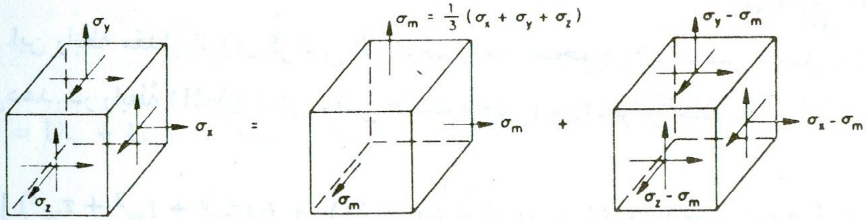
شود، نمایش جدیدی از انرژی کرنشی بدست خواهد آمد. حالت تنش برای شکل (3-5b) به صورت زیر است؛

$$\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

این حالت تنش فقط در جسم تغییر حجم ایجاد می‌کند و «تانسور تنش انبساطی»[1] نامیده می‌شود. در این رابطه $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ تنش متوسط می‌باشد. در اثر این تنش متوسط، کرنش متوسط برابر $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ خواهد بود. جمع کرنش‌های نرمال در این حالت $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ است و تغییر حجم واحد حجم را نشان می‌دهد. در نتیجه؛ انرژی کرنشی انبساطی برای واحد حجم برابر خواهد شد با؛

$$U_{\circ v} = \frac{3}{2}\sigma_m \varepsilon_m = \frac{\sigma_m^2}{2k} = \frac{1}{18k}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \qquad (3\text{-}20)$$

که در آن k طبق رابطهٔ (3-10) است.



(a) (b) (c)

شکل (3-5)

1- dilatational stress tensor

حالت تنش برای شکل (3-5c) به صورت زیر است؛

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

و «تانسور تنش تغییر شکل»[1] نامیده می‌شود. در این حالت در جسم تغییر شکل وجود دارد، ولی تغییر حجم صفر است. علت صفر بودن تغییر حجم این است که جمع کرنش‌های نرمال برابر صفر می‌باشد؛

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_m) + (\varepsilon_y - \varepsilon_m) + (\varepsilon_z - \varepsilon_m) = 0$$

انرژی کرنشی تغییر شکل برای واحد حجم، $U_{\circ d}$، در اثر حالت تنش (b) را می‌توان به صورت زیر بدست آورد. چون $U_{\circ v}$ و $U_{\circ d}$ اجزاء انرژی‌کرنشی هستند، $U_\circ = U_{\circ v} + U_{\circ d}$ خواهد شد. در نتیجه اگر به جای $U_\circ$ مقدار آن از رابطهٔ (3-15) و به جای $U_{\circ v}$ مقدار آن از رابطهٔ (3-20) قرار داده شود، $U_{\circ d}$ برابر خواهد شد با؛

$$U_{\circ d} = \frac{3}{4G}\tau_{oct}^2 \qquad (3\text{-}21)$$

این رابطه مقدار انرژی کرنشی الاستیک واحد حجم در اثر تغییر شکل را نشان می‌دهد. در رابطهٔ (3-21)، تنش برشی هشت وجهی، τ_{oct}، برابر است با؛

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right]^{1/2} \qquad (3\text{-}22)$$

انرژی کرنشی تغییر حجم برای بیان معیار تسلیم در اجسام کاربرد دارد. این کاربرد در بخش هشتم بطور مفصل بررسی خواهد شد.

1- distortional stress tensor

مثال 2-2

یک میله فولادی با مقطع یکنواخت A تحت بار محوری N قرار دارد. عبارتهائی برای دانسیته انرژی کرنشی، اجزاء انرژی کرنشی، و انرژی کرنشی کلی میله بدست آورید. فرض کنید $\nu = 0.25$ است.

حل ـ حالت تنش در هر نقطه از میله تنش تک محوری زیر است؛

$$\sigma_x = \sigma = N/A \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

بنابراین، تنش مربوط به تغییر حجم $\sigma_m = \sigma/3$ و تنش تغییر شکل $\sigma_x - \sigma_m = 2\sigma/3$، $\sigma_y - \sigma_m = \sigma_z - \sigma_m = -\sigma/3$ است، شکل (c,2-11b). دانسیته انرژی کرنشی برای حالت‌های a و b و c به ترتیب برابر است با؛

$$U_\circ = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$U_{\circ v} = \frac{(1-2\nu)\,\sigma^2}{6E} = \frac{\sigma^2}{12E}$$

$$U_{\circ d} = \frac{(1+\nu)\,\sigma^2}{3E} = \frac{5\sigma^2}{12E}$$

از نتایج دیده می‌شود که؛

$$U_\circ = U_{\circ v} + U_{\circ d} \quad , \quad 5U_{\circ v} = U_{\circ d}$$

به عبارت دیگر در حالت تنش تک محوری، انرژی واحد حجم تغییر شکل پنج برابر انرژی واحد حجم تغییر حجم است. انرژی کلی ذخیره شده در میله برابر می‌شود با؛

$$U = \int \frac{N^2 dx}{2AE} \qquad (3\text{-}22)$$

که در آن انتگرال روی میله گرفته می‌شود.

3-6 اثر تنش و کرنش موضعی، اصل سنت و نانت

در مکانیک نیوتونی برای تحلیل استاتیکی یا دینامیکی یک جسم، یک سیستم نیرو می‌تواند با سیستم نیروی دیگری جایگزین شود، به شرط اینکه منتجه نیرو و ممان دو سیستم برابر باشد. باید توجه داشت که چون ترتیب دوسیستم نیرو یکسان نیست، کرنش ناشی از آن دو نیز برابر نخواهد بود. اصل سنت و نانت مربوط به استفاده از بار معادل برای محاسبه تنش و کرنش است. این اصل بیان می‌کند که اگر یک سیستم نیرو، توسط سیستم معادل استاتیکی دیگر جایگزین شود، توزیع تنش و کرنش در همه جسم بجز در محدوده نزدیک محل اعمال بار، تغییر نخواهد کرد.

این اصل در مسائل مهندسی کاربرد زیادی دارد. در موقع تحلیل یک جسم معمولاً نتایج بدست آمده در داخل جسم با شرایط مرزی هم‌آهنگی کامل ندارد. در چنین مواردی باتوجه به اصل سنت و نانت فقط در محدوده بارگذاری ناهم‌آهنگی وجود دارد و در بقیه جسم جواب بدست آمده صحیح است. علاوه بر این در بسیاری موارد تحلیل یک حالت خاص می‌تواند جز در محدودهٔ بارگذاری، برای حالتهای مشابه دیگر بکار رود.

به عنوان مثال وقتی یک میله تحت آزمایش کششی قرار دارد، نیروی اعمال شده توسط گیره‌ها در دو انتها اثر موضعی دارد، و در ناحیه نزدیک وسط نمونه توزیع تنش را می‌توان یکنواخت فرض کرد. همچنین طبق اصل سنت و نانت برای تحلیل یک تیر کنسول، اثر دیوار را می‌توان با نیروی قائم، نیروی افقی و ممان جایگزین کرد. این جایگزینی هرچند اثر موضعی خاصی خواهد داشت، ولی تأثیری در توزیع تنش و کرنش در قسمت‌های دیگر تیر نخواهد داشت.

مسائل بخش سوم

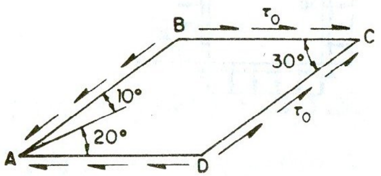
3-1

یک ورق نازک مطابق شکل تحت تنش برشی یکنواخت $\tau_0 = 70$ MPa قرار دارد. اگر $E=200$ GPa، $\nu = 0.3$، $AB = 40_{mm}$ و $BC = 60_{mm}$ باشد؛

(a) تغییر طول AB را بدست آورید.

(b) تغییر طول قطرهای AC و BD چقدر است؟

(c) کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را پیدا کنید.



شکل (م 1-3)

3-2

یک نمونه به قطر 12 میلیمتر تحت بارکششی قرارگرفته است. در اثر بار 9KN، تغییر طول میله برای $L= 75_{mm}$، 0.025_{mm} است. تنش‌ها و کرنش‌های حقیقی و مهندسی چقدر هستند؟ مدول الاستیسیته را بدست آورید.

3-3

یک ورق مربع شکل به ضلع 50 میلیمتر تحت تنش (برحسب مگاپاسکال) مطابق