بخش دوم

انتشار موجهای تنش محوری و تنش پیچشی ناشی از ضربه در میله‌های بلند منشوری

۱ـ۲ـ مقدمه

در مقاومت مصالح مقدماتی، و حتی در برخی مسایل مقاومت مصالح پیشرفته. تحلیل مسایل با فرض این که بار وارد به جسم استاتیکی است، انجام می‌پذیرد. ولی بسیاری از مسایل مهندسی با توجه به این فرض قابل بررسی و توجیه نیست. از جمله این مسایل : برخورد اجسام جامد با یکدیگر (برای برآورد مقدار تنش در آنها)، شکست بعضی از قطعات ترد در اثر ضربه‌های فشاری، پیدایش و انتشار ترکهای کششی در قطعات ترد تحت شوک فشار و غیره را می‌توان نام برد. آشنایی با موج تنش و انتشار آن برای شناخت علت و توجیه این مسایل، ضروری است. در ابتدا، برخی تعاریف مورد نیاز برای تئوری موج تنش را بیان می‌کنیم:

یک موج تنش، وقتی در یک جسم جامد انتقال می‌یابد که قسمتهای مختلف آن، شبیه حالت برخورد اجسام جامد با یکدیگر، در حالت تعادل نباشد. در این موارد، با توجه به خواص فیزیکی اجسام یک زمان محدود لازم است تا این عدم تعادل توسط قسمتهای دیگر جسم حس شود. عدم تعادل موضعی باعث حرکت ذرات جسم شده، این حرکت همراه با توزیع تنش است. تنش ایجاد شده با

سرعت معینی، در جسم منتشر شده؛ شکل انتشار آن به صورت موج است. باید توجه داشت که مطابق این تعریف، در مواردی از این دست، جسم دارای دو نوع سرعت است: سرعت ذرات جسم " و " سرعت انتشار موج تنش در جسم " اما این دو سرعت با هم متفاوت هستند.

موجهائی که در داخل جرم یک جسم انتقال می‌یابند: موج حجمی یابنده‌ای[1]؛ و موجهائی که در سطح جسم انتقال می‌یابند: "موج سطحی[2]" نامیده می‌شوند. امکان اینکه در یک جسم این دو موج به‌طور همزمان، انتشار یابند، وجود دارد.

به هر حال، در بررسی مقدماتی موجهای تنش الاستیک، دو نوع موج در یک میله بلند انتشار می‌یابند. این دو نوع موج عبارتند از :

(i) موجهای تنش طولی

و (ii) موجهای تنش پیچشی

منظور از میله در این بحث، جسم جامدی است که طول آن نسبت به ابعاد سطح مقطع آن خیلی بزرگتر می‌باشد.

در یک میله بلند و ثابت، موجهای تنش طولی به دو صورت موجهای تنش فشاری و موجهای تنش کششی انتشار می‌یابند. در موجهای تنش فشاری ـ صرفنظر از ضریب پواسون جهت حرکت ذرات و جهت حرکت موج تنش یکی بوده و در موجهای تنش کششی ، این دو در خلاف جهت هم خواهند بود. در ضمن باید توجه داشت که در موجهای تنش پیچشی، حرکت موج تنش در امتداد طول میله و حرکت ذرات جسم روی سطح مقطع آن اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر، جهت این دو حرکت عمود بر یکدیگر خواهد بود.

۲ـ۲ـ انتشار موج تنش فشاری

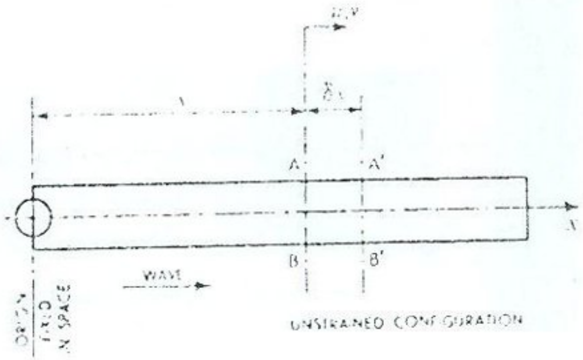
برای بررسی انتشار موج تنش فشاری، یک میله بلند منشوری و ایزوتروپیک در نظر گرفته می‌شود. (مطابق شکل (۱ـ۲)). در آغاز تغییر مکان مقطع AB از میله که به فاصله x از مبدأ O قرار دارد، u فرض می‌شود. مبدأ مختصات O در فضا ثابت است، و انتهای میله در زمان $t = 0$؛ یا به عبارت دیگر، در حالت بدون تنش، در این نقطه قرار گرفته است. بدین ترتیب، O مبدأ مختصات

1 - body waves

2 - surface waves

عبارت دیگر، در حالت بدون تنش، در این نقطه قرار گرفته است. بدین ترتیب، o مبدأ مختصات ثابت در فضا است.

تغییر مکان مقطع $A'B'$ که موازی AB بوده، در فاصله $x + \delta x$ از o قرار دارد، بنابراین $u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x$ خواهد بود. در ضمن، با فرض این که در زمان $t = 0$ به انتهای $x = 0$ میله یک نیروی فشاری ناگهانی وارد آمده است، در زمان t تنش نرمال فشاری بر روی سطح AB، σ_o خواهد بود.



شکل (۱-۲)

برای تحلیل الاستیک میله، روابط تعادل، روابط هوک و روابط کرنش - تغییر مکان ضروری است. در تحلیل مقدماتی زیر از اثر کرنش عرضی و اینرسی، و در عین حال، از نیروهای وزنی و میرا صرفنظر می‌شود.

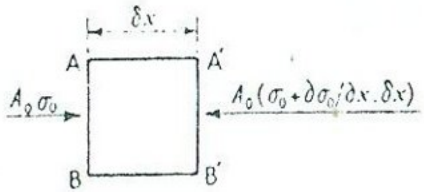
سطح مقطع میله A_o است، رابطه حرکت به صورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\partial \sigma_o}{\partial x}\delta x\, A_o = A_o\, \rho_o\, \delta_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \sigma_o}{\partial x} = -\rho_o \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(a)}$$

که در آن ρ_o چگالی جسم بدون کرنش است. علت علامت منفی در این رابطه این است که براساس سیستم تنش فشاری نشان داده شده، شتاب المان در جهت x منفی خواهد بود.



شکل (۲-۲)

کرنش در المان به طول dx برابر با $\frac{\partial u}{\partial x}$ است، در نتیجه قانون هوک به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sigma_0}{E}$$

که در آن E مدول الاستیسته جسم است.

با مشتق گرفتن از عبارت فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = -E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (b)$$

از ترکیب روابط (a) و (b) معادله دیفرانسیل درجه دوم به دست می‌آید:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

یا:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C_1^{\,2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۱-۲)$$

که در آن:

$$C_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \qquad (۲-۲)$$

حل معادله موج:

معادله موج یک محوری به صورت زیر مفروض است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c)$$

می‌توان نشان داد که حل کلی این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$u = f(x-ct) + F(x+ct) \qquad (d)$$

که در آن f و F توابع مستقل و دلخواهی هستند. با دو بار مشتق‌گیری از u نسبت به زمان t نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = cf'(x-ct) + cF'(x+ct) \qquad (e)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 F''(x+ct) \qquad (f)$$

به‌طریق مشابه با دو بار مشتق گرفتن نسبت به x نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-ct) + F'(x+ct) \qquad (g)$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-ct) + F''(x+ct) \qquad (h)$$

روابط (f) و (h) در رابطه (c) صادق هستند، در نتیجه می‌توان گرفت که حل کلی رابطه (c) به صورت رابطه (d) خواهد بود. باید توجه داشت که توابع $f(x-ct)$ ، $F(x+ct)$ می‌توانند توابعی از نوع $\sin w$ ، $\exp w$ ، w^n و غیره باشد که در آن w همان $(x-ct)$ یا $(x+ct)$ است.

با انتخاب عبارت اول رابطه (d) ، u برابر می‌شود با:

$$u = f(x-ct) \qquad (i)$$

اگر در $t = t_1$ ، $x = x_1$ و همچنین در $t = t_2$ ، $x = x_2$ ، $u = s$ باشد، شکل (۳-۲) از رابطه (i) نتیجه خواهد شد:

$$s = f(x_1 - ct_1) = f(x_2 - ct_2)$$

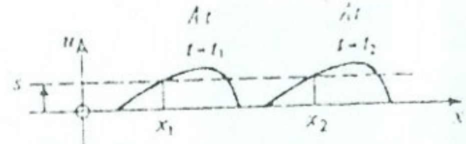
و در نتیجه؛

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$$

از این رابطه c برابر خواهد شد با:

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

بدین ترتیب c در رابطه (i) نرخ پیشروی موج در جهت محور x است. بطریق مشابه، C_L در رابطه‌های (۱-۲) و (۲ - ۲) سرعت پیشروی موج تنش می‌باشد.



شکل (۳ ـ ۲)

با توجه به بررسی فوق دیده می‌شود که انتخاب u به صورت رابطه (i) نشاندهنده حرکت موج در جهت ازدیاد x (x مثبت) خواهد بود. به طریق مشابه، اگر از عبارت دوم رابطه (d) [$F(x + ct)$] استفاده شود. حرکت موج در جهت کم شدن x (x منفی) خواهد بود.

بدین ترتیب، موج $f(x - ct)$ موج حرکت کننده به سمت جلو و موج $F(x + ct)$ موج حرکت کننده به سمت عقب نامیده می‌شوند.

عبارتهای $f(x - ct)$, $F(x + ct)$ به تنهائی یا با ترکیبهای مناسب می‌توانند جواب معادله موج (c) باشند. باید توجه داشت که با انتخاب این عبارتها، فرض بر این خواهد بود که ضمن پیشروی شکل موج ثابت است. به عبارت دیگر، موج تنش میرا نمی‌باشد.

۳ـ۲ـ سرعت موج تنش طولی الاستیک.

با بررسی راه حل ساده ارائه شده فوق نتیجه می‌شود که C_L در رابطه (۲ ـ ۲) سرعت انتشار موج تنش طولی در یک میله الاستیک بدون کرنش است. این سرعت برابر $\sqrt{E/\rho_0}$ بوده، برای موجهای تنش طولی کششی و فشاری یکسان هستند.

باید توجه داشت که C_L مستقل از $\frac{\partial u}{\partial t}$ یا سرعت ذرات جسم است به عبارت دیگر، C_L سرعت انتشار موج تنش بوده و به خواص فیزیکی جسم بستگی دارد، حال آنکه $\frac{\partial u}{\partial t}$ به شکل نیروی وارده بستگی خواهد داشت.

برای نمونه: سرعت انتشار موج تنش محوری در چند جسم مختلف، در جدول (۱ - ۲) آورده شده است. باید توجه داشت که چون مدول الاسیستیه E تابع درجه حرارت است، C_L نیز با درجه حرارت تغییر می‌کند در ضمن، مقادیر داده شده در جدول (۱ ـ۲) با فرض ایزوتروپیک بودن جسم صحیح می‌باشد.

جدول (۱ ـ۲) سرعت‌های انتشار موجهای الاستیک محوری و پیچشی

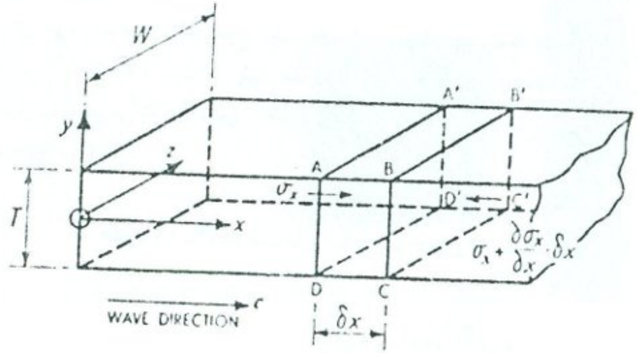
$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad \text{and} \quad c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$$

	Cast Iron	Carbon Steel	Brass	Copper	Lead	Aluminium	Glass
E lbf/in²	$16.5 \cdot 10^6$	$29.5 \cdot 10^6$	$13.5 \cdot 10^6$	$16.5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
ρ_0 = lb/in³	0·26	0·28	0·30	0·32	0·41	0·096	0·070
$c_L = \sqrt{E/\rho_0}$ ft/sec ($g = 384$ in/sec/sec)	13 025	16 900	11 000	12 100	3 900	16 700	17 500
$c_T = \sqrt{G/\rho_0}$ ft/sec	8 100	10 600	6 700	9 300	2 300	10 200	10 700

۴-۲- انتشار موج تنش محوری در شرایط کرنش صفحه‌ای

برای بدست آوردن سرعت موج تنش محوری، در قسمت (۲-۲) فرض بر این قرار گرفت که میله بلند است و در جهت‌های عرضی آزاد می‌باشد، در این صورت، قانون هوک به‌گونه ساده $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ مورد استفاده قرار گرفت. در این قسمت و قسمت بعد میله در حالت کرنش صفحه‌ای و میله در حالت مقید در جهت‌های عرضی بررسی می‌گردد. طبیعی است که در این حالت‌ها، با تغییر قانون هوک معادله انتشار موج متفاوت می‌شود، در نتیجه سرعت انتشار موج تغییر می‌کند.

میله‌ای مطابق شکل (۲-۴) با ابعاد مقطع T , w در نظر گرفته و فرض می‌شود که طول آن نسبت به ابعاد مقطع بسیار بزرگ می‌باشد.



شکل (۴-۲)

مثل حالت قبل که مبداء O و محور OX در فضا ثابت بوده، فرض می‌شود که طول موج اعمال شده در $t = 0$, $x = 0$ بسیار بزرگتر از T می‌باشد. با انتخاب المان ABCD , A'B'C'D' و نوشتن رابطه تعادل این نتیجه بدست می‌آید:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (a)$$

که در آن u، تغییر مکان ذره‌ای است که در یک حالت بدون تنش به فاصله x از مبداء قرار می‌گیرد. تنشهای خطی در جهت‌های x , y , z به صورت σ_x , σ_y , σ_z، همچنین کرنشهای خطی در این جهت‌ها به صورت ε_x , ε_y , ε_z نشان داده می‌شوند. با توجه به اینکه، میله در حالت کرنش صفحه‌ای قرار گرفته، شرایط ذیل در میله حاکم می‌باشد:

$$\varepsilon_z = 0 , \sigma_y = 0 \qquad (b)$$

به عبارت دیگر، میله، در جهت y آزادانه حرکت می‌کند و در جهت z مقید است. با استفاده از قانون هوک می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu\sigma_x}{E} = 0$$

یا:

$$\sigma_z = \nu\sigma_x \qquad (c)$$

از طرفی کرنش ε_x برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{-\sigma_x - \nu\sigma_z}{E}$$

با استفاده از رابطه (b) و با قرار دادن $\frac{\partial u}{\partial x}$ به جای ε_x نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(1-\nu^2)}{E}\sigma_x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \qquad (d)$$

با استفاده از روابط (a) و (d) معادله موج تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0 (1-\nu^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۲-۳)$$

و در نتیجه سرعت موج تنش محوری در این حالت برابر می‌شود با:

$$c'_L = \sqrt{\frac{E}{\rho_\circ (1-\nu^2)}} \quad \text{یا} \quad \frac{C'_L}{C_L} = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \qquad (۲-۴)$$

نسبت C'_L/CL برای چند ضریب پواسون مختلف در جدول (۲ ـ ۲) آورده شده است.

۵ ـ ۲ ـ انتشار موج تنش محوری برای میله‌ای که در جهت‌های عرضی مقید است

با مراجعه مجدد به شکل (۴ ـ ۲) و با فرض مقید بودن میله در جهت‌های y ، z شرایط حاکم در این میله به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \qquad (a)$$

با استفاده از رابطه هوک نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_y - \sigma_x)}{E} = \frac{\sigma_y (1-\nu) + \nu\sigma_x}{E} = 0$$

یا:

$$\sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \qquad (b)$$

از طرفی ε_x برابر می‌شود با:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial_x} = \frac{-\sigma_x - 2\nu\sigma_y}{E}$$

این رابطه با استفاده از رابطه (b) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial_x} = -\sigma_x \frac{(1-\nu-2\nu^2)}{E(1-\nu)}$$

در نتیجه :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} = -E\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial_x^2} \qquad (c)$$

با ترکیب این رابطه و رابطه (a) قسمت (۴ ـ ۲) معادله موج تنش در این حالت به صورت نهائی زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_\circ}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial_x^2} \qquad (۲-۵)$$

و در نتیجه، سرعت انتشار موج تنش طولی برابر می‌شود با:

$$C''_L = \sqrt{\frac{E}{\rho_\circ} \cdot \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

یا

$$\frac{C''_L}{C_L} = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \qquad (۲-۶)$$

c''_L را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$C''_L = \sqrt{\frac{(\lambda + 2G)}{\rho_\circ}}$$

که در آن λ ثابت لامه بوده، برابر است با:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

نسبت C''_L/C_L نیز در جدول (۲ ـ ۲) آورده شده است.

جدول (۲-۲) سرعت انتشار موج تنش محوری در حالی که میله در جهت‌های عرضی مقید است

ν	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
c'_L/c_L	$\frac{4}{\sqrt{15}}$ $\simeq 1.03$	$3\sqrt{2}/4$ $\simeq 1.06$	$2\sqrt{3}/3$ $\simeq 1.15$
c''_L/c_L	$\sqrt{1.2}$ $\simeq 1.1$	$\sqrt{1.5}$ $\simeq 1.22$	∞

۶-۲- عبارتی برای شدت تنش منتشر شده

کرنش محوری در المانی از میله تحت تنش برابر خواهد بود با:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (a)$$

در نتیجه:

$$\sigma_o = -E\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (b)$$

با استفاده از روابط (c) ، (g) [قسمت (۲-۲)] این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_o = \frac{E}{c_l}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (c)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ سرعت میله در مقطع x بوده، و اگر با v نشانداده شود، نتیجه خواهد شد:

$$\sigma_o = \frac{Ev}{c_L} = \rho_o c_L v \qquad (۲-۷)$$

در مجموع بحث میله تحت تنش محوری، جز در مواردی که مشخصاً بیان خواهد شد، فرض بر آن است که میله در حالت کمانش و یا ناپایداری قرار ندارد.

رابطه (۷-۲) برای انتشار موج کششی نیز قابل استفاده است.

برای مقایسه سرعت انتشار موج تنش و سرعت ذرات جسم، از رابطه (۷-۲) این نتیجه بدست آید:

$$v_o = \frac{\sigma_o}{\sqrt{E\rho_o}}$$

در یک میله فولادی تحت تنش $16\ \text{tonf}/\text{in}^2$ ، سرعت ذرات برابر خواهد شد با:

$$v_o = \frac{16 \times 2240}{\sqrt{30 \times 10^6 \times 0.28/384}} \approx 20\ \text{ft/sec}$$

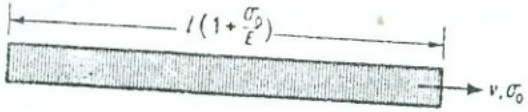
مقدار ρc در میله‌ها، معمولاً "امپدانس مکانیکی[1]" نامیده می‌شود.

۷-۲- سرعت انتشار موج در جسم تحت تنش و در فضای اشغال شده توسط جسم بدون تنش

یک میله بلند مطابق شکل (۵-۲) در نظر گرفته، فرض می‌شود یک موج الاستیک کششی از انتهای سمت راست آن شروع کرده، به طرف چپ میله حرکت می‌کند. پس از رسیدن موج تنش به انتهای چپ، طول میله برابر می‌شود با $(1 + \frac{\sigma_o}{E})$ که در آن σ_o شدت تنش کششی است، اگر سرعت موج در فضای اشغال شده توسط میله تحت تنش را با C_L و سرعت حرکت ذرات را با v نشان دهیم نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{L\left(1 + \frac{\sigma_o}{E}\right)}{C_L} = \frac{L\frac{\sigma_o}{E}}{v} \qquad (a)$$

این رابطه با توجه به این حقیقت نوشته شده است که زمان رسیدن موج تنش از یک انتها به انتهای دیگر، برابر با زمانی است که انتهای سمت راست میله به اندازه $\delta L = L\frac{\sigma_o}{E}$ جابه جا شده است.



شکل (۵-۲)

1 - mechanical impedance

از رابطه (a) نتیجه می‌شود:

$$C_E = \frac{v\left(1+\frac{\sigma_o}{E}\right)}{\frac{\sigma_o}{E}} \qquad (b)$$

با استفاده از رابطه (۷ـ۲) رابطه (b) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C_E = C_L + v$$

یا:

$$C_E = C_o + v \qquad (۲ - ۸)$$

که در رابطه اخیر از C_o به جای C_L استفاده شده است.

به طریق مشابه، اگر یک میله تحت تنش فشاری مورد بررسی قرار گیرد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$C'_E = C_o - v \qquad (۲ - ۹)$$

المانی به طول واحد تحت اثر تنش کششی، طولی برابر با (e + 1) خواهد شد، لذا:

$$\frac{1}{C_o} = \frac{1+e}{C_E}$$

$$C_E = C_o(1+e) = C_o + v$$

$$CE/C_o = 1 + v/C_o$$

در برخوردهای میکانیکی، سرعت v از مرتبه 10 ft/sec و سرعت C_o از مرتبه 10000 ft/sec بدست می‌آید. در نتیجه، در حالتهای برخوردهای الاستیک، فرق قابل توجهی بین C_o , C_E وجود ندارد.

۸ـ۲ ـ انتشار موج تنش پیچشی در یک میله بلند استوانه‌ای

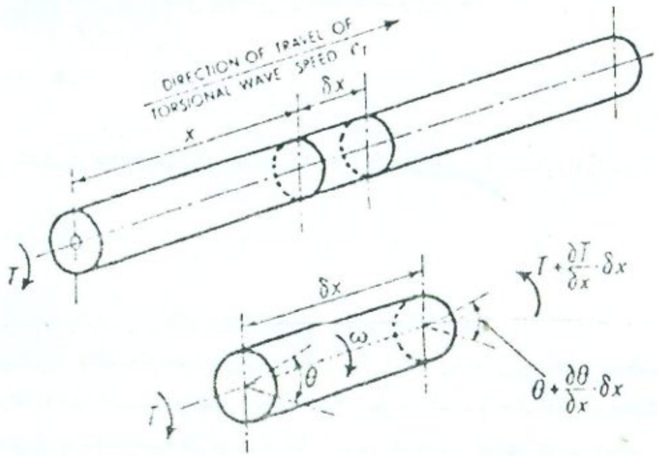
فرض می‌شود، کوپل پیچشی T که با زمان تغییر می‌کند، در $t = 0$ بطور ناگهانی در انتهای سمت چپ یک میله بلند استوانه‌ای وارد آید، شکل (۶ ـ ۲). محور ox در امتداد محور استوانه و مبداء o در مرکز مقطع سمت چپ میله و ثابت فرض شود:

برای بررسی و تحلیل این مساله، المانی از میله‌ای به طول δ_x و در فاصله x از مبداء o

انتخاب می‌گردد. زاویه پیچشی انتهای سمت چپ المان θ و انتهای سمت راست $\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}\delta x$ است و به طریق مشابه کوپل پیچشی در این دو انتها به ترتیب T و $T + \frac{\partial T}{\partial x}\delta x$ خواهد بود. بدین ترتیب، کوپل خالص وارد به المان $\frac{\partial T}{\partial x} . \delta x$ بوده، با توجه به شتاب زاویه‌ای المان $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ ـ تعادل چرخشی المان به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial T}{\partial x} . \delta x = (I . \delta_x)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad (a)$$

که در آن $I\delta x$ ممان اینرسی المانی به طول δx حول محور میله می‌باشد.



شکل (۶ ـ ۲)

با استفاده از تئوری مقدماتی پیچش رابطه کوپل و زاویه پیچش به صورت زیر می‌باشد:

$$T = JG \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}\delta x}{\delta_x} = JG \frac{\partial \theta}{\partial_x} \qquad (b)$$

در این رابطه G مدول برشی و J ممان قطبی مقطع می‌باشد. با مشتق‌گرفتن از رابطه (b) و ترکیب نتیجه با رابطه (a) نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = JG \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

یا:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{JG}{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = C_T^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (۲ - ۱۰)$$

رابطه (۱۰ - ۲) در مورد انتشار موج تنش محوری مشابه رابطه (۱ - ۲) است. در این رابطه C_T سرعت انتشار موج تنش پیچشی در میله است و برابر با:

$$C_T = \sqrt{\frac{JG}{I}} \qquad (۲ - ۱۱)$$

می‌باشد. در میله استوانه‌ای $I = \rho_\circ \pi a^4/2$, $J = \pi a^4/2$ است، و در نتیجه:

$$C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho_\circ}} \qquad (۲ - ۱۲)$$

مقادیر نمونه‌ای از C_T در جدول (۱ - ۲) آورده شده است.

باید توجه داشت که چون برای بدست آوردن رابطه موج تنش پیچشی و سرعت آن از روابط دقیق استفاده شده است، جوابهای بدست آمده دقیق می‌باشد، و حال آنکه در حالت انتشار موج تنش محوری به علت صرفنظر کردن از آثار اینرسی شعاعی، جوابها تقریبی است.

با مقایسه روابط (۲ - ۲) و (۱۲ - ۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{C_L}{C_T} = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{2(1+\nu)}$$

و چون $0 \leq \nu \leq 0.5$ است، محدوده این نسبت برابر خواهد شد با: $\sqrt{2} \leq \frac{CL}{CT} \leq \sqrt{3}$. برای محاسبه تنش پیچشی در یک نقطه، مقدار کوپل در آن مقطع باید برآورد شود. با روشی مشابه حالت انتشار موج تنش محوری، حل رابطه (۱۰ - ۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta = g(x - C_T t)$$

یعنی؛ زاویه پیچش هر مقطع از میله، تابعی از $(x - C_T t)$ می‌باشد.

با مشتق گرفتن از این رابطه نسبت به x و t نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = g'(x - C_T t)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -C_T g'(x - C_T t)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{C_T}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

از طرف دیگر:

$$T = JG \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

با ترکیب دو رابطه اخیر نتیجه خواهد شد:

$$T = \frac{JG}{C_T} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = J\sqrt{G\rho_\circ}\,\omega \qquad (c)$$

که در آن $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$ سرعت زاویه‌ای مقطع می‌باشد. برای یک لوله جدار نازک:

$$J \approx 2\pi a_\circ^3 t_\circ$$

است که در آن $a_\circ$ شعاع متوسط لوله و $t_\circ$ ضخامت آن می‌باشد. با فرض تنش برشی متوسط τ روی مقطع، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\tau \cdot 2\pi a_\circ t_\circ \cdot a_\circ = 2\pi a_\circ^3 t_\circ \sqrt{G\rho_\circ}\,\omega$$

یا:

$$\tau = \rho_\circ C_T (a\omega) \qquad (۲ - ۱۳)$$

در حالت لوله جدار نازک تحت پیچش، رابطه بدست آمده برای τ، مشابه رابطه (۷-۲) در مورد تنش محوری خواهد بود.

بررسی انتشار موج پیچشی به کمک انتشار موج محوری:

در قسمتهای (۴ - ۲) و (۵-۲) به بررسی انتشار موج تنش در میله‌هائی که به صورتی در جهت‌های عرضی مقید هستند، پرداختیم. در اینجا با استفاده از روشی مشابه، می توان سرعت انتشار موج تنش پیچشی در لوله‌های جدار نازک را با استفاده از سرعت انتشار موج محوری بدست آورد. بدین منظور، لوله نازکی مطابق شکل (۷ - ۲) در نظر گرفته می‌شود. در اثر اعمال کوپل پیچشی ناگهانی T، المانی از لوله در حالت برشی خالص و تحت تنش برشی τ قرار خواهد گرفت. تنشهای اصلی در این لوله روی نوار مارپیچ به زاویه 45° قرار گرفته، که برابر با $+\tau$ و $-\tau$ می‌باشند. در نتیجه، یک نوار مارپیچ از لوله، مشابه یک میله، تحت حالت خاص تنش ($\pm\tau$) قرار دارد. به عبارت دیگر، تحریک یک کوپل پیچشی در انتهای یک لوله جدار نازک، معادل انتشار موج محوری در متداد این نوار مارپیچ می‌باشد.

معادله حرکت المانی از نوار مارپیچ در امتداد محور اصلی تنش کششی به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_\circ A_\circ dx_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = A_\circ d\tau \qquad (d)$$

از طرف دیگر، در این المان :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\tau(1+\nu)}{E} \qquad (e)$$

با ترکیب روابط (d) ، (e) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_\circ (1+\nu)} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \qquad (f)$$

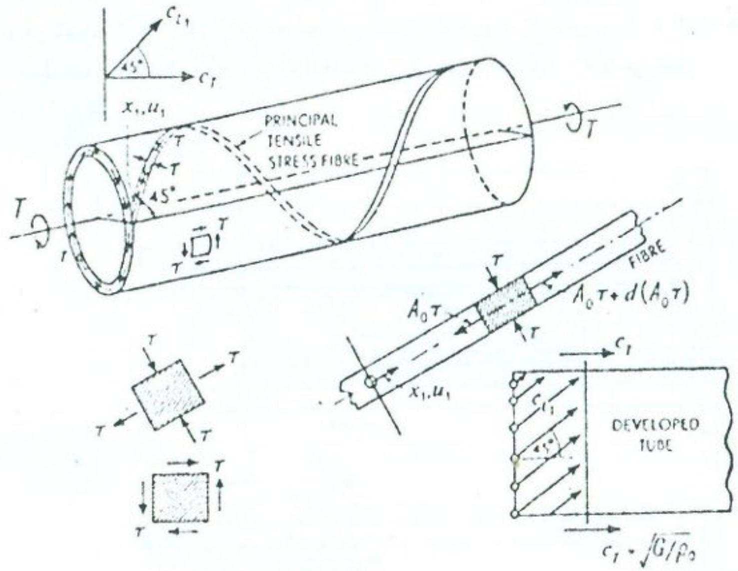
در نتیجه، سرعت انتشار موج تنش محوری طولی در امتداد نوار برابر می‌شود با:

$$C_{L1} = \sqrt{\frac{E}{\rho_\circ (1+\gamma)}} \qquad (g)$$

واضح است که سرعت انتشار موج تنش فشاری، در امتداد نواری عمود بر نوار انتخاب شده، برابر با همین مقدار خواهد بود.

سرعت انتشار موج در امتداد محور لوله، همان سرعت انتشار موج پیچشی C_T است، که با برابر با $C_L \cos 45^\circ$ خواهد بود. در نتیجه:

$$C_T = \frac{C_{L1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\gamma)\rho_\circ}} = \sqrt{\frac{G}{\rho_\circ}} \qquad (h)$$



شکل (۷-۲)

۹-۲- انعکاس و ترکیب موجهای تنش

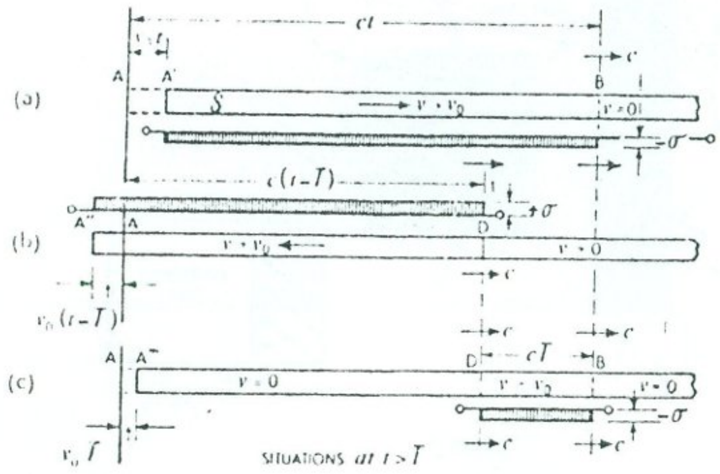
دوباره یادآوری می‌شود که در موج تنش کششی، جهت انتشار موج و جهت حرکت ذرات، مخالف یکدیگر، بوده اما در موج تنش فشاری هم سو است. در ضمن، باید توجه داشت که رابطه کلی موج:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

خطی است، در نتیجه حلهای این رابطه، قابل ترکیب خواهد بود. در ادامه بحث نمادهای C، C_1 و C_0 یکسان فرض می‌شوند.

ترکیب موجهای تنش

(i) میله بلند S مطابق شکل (۲ - ۸a) در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود که انتهای سمت چپ A با سرعت v_0 به سمت راست حرکت می‌کند. پس از زمان t، A به A' رسیده و در نتیجه $AA' = v_0 t$ خواهد شد. در همان زمان موج تنش فشاری $\sigma = \rho_0 c_0 v_0$ که به میله اعمال شده در امتداد میله از A تا B انتشار می‌یابد در نتیجه $AB = c_0 t$ می‌باشد.



شکل (۲-۸)

(ii) در حالت دوم فرض می‌شود که انتهای میله‌ای مشابه S پس از زمان $t = T$ با همان سرعت v_0 به سمت چپ حرکت می‌کند، شکل (2 - 8 b) و همزمان با آن موج تنش کششی $\sigma = \rho_0 C_0 v_0$ از A به سمت راست انتشار می‌یابد. در نتیجه در زمان $t>T$، $AA'' = v_0 (t - T)$ و $AD = C_0 (t - T)$ خواهد شد.

(iii) حال اگر فرض گردد که انتهای سمت چپ میله A که در زمان $t = 0$ با سرعت v_0 شروع به حرکت به سمت راست کرده، پس از زمان $t = T$ با همان سرعت به سمت چپ حرکت بکند، و به ترتیب در زمانهای بیان شده موجهای تنش فشاری و کششی مثل حالتهای (i) و (ii) در میله انتشار یابد، نتیجه ترکیب این دو حالت مطابق شکل (۲ - ۸c) خواهد بود. به عبارت دیگر، در اثر ترکیب دو حالت فوق: A به A'' تغییر مکان داده، $AA'' = v_0 T$ می‌باشد. قسمت $A''D$ میله ساکن و بدون تنش خواهد بود اما قسمت DB میله به طول CT با سرعت v_0 به سمت راست حرکت کرده و تحت تنش فشاری σ_0 قرار خواهد گرفت.

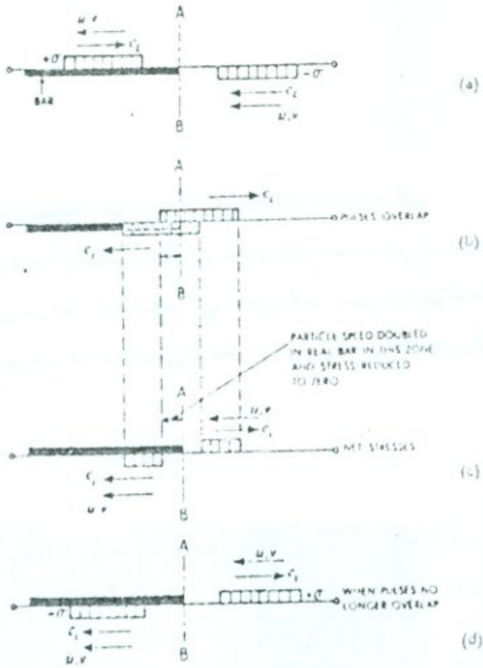
بررسی فوق ترکیب موجهای تنش محوری در یک میله را نشان می‌دهد که در نهایت در اثر این ترکیب، میله تحت تأثیر یک موج پله‌ای فشاری قرار خواهد گرفت شکل (۲ - ۸c).

انعکاس موجهای تنش

وقتی یک موج محوری به انتهای یک میله می‌رسد، با توجه به شرایط مرزی انتها، به صورتهای مختلف انعکاس می‌یابد. برای بررسی نحوه انعکاس موج، دو نوع انتهای آزاد وگیردار در ادامه این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

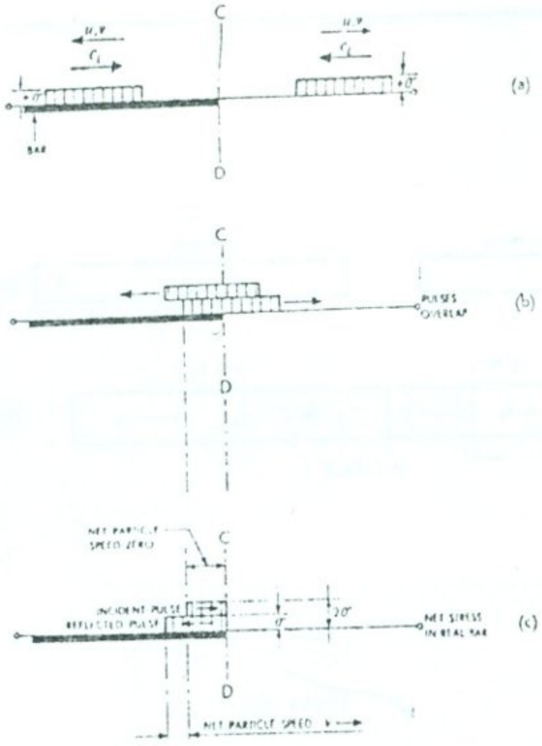
(i) **انتهای ساده:** موج تنش کششی پله‌ای مطابق شکل (۲ - ۹a) روی میله‌ای در جهت x مثبت انتشار می‌یابد. برای بررسی انعکاس این موج در انتهای آزاد AB، فرض می‌شود که یک موج پله‌ای فرضی با همان شدت وهمان طول در خلاف جهت موج اول حرکت می‌کند. این دو موج در AB به یکدیگر رسیده، پس از مدت زمان معینی از یکدیگر عبور خواهند کرد. شکل (۲ - ۹d). در مدت زمان تلاقی این دو موج (شکلهای (۲ - ۹b) و (۲ - ۹c) نتیجه تنش در AB صفر خواهد بود و شرایط انتهای آزاد را خواهد داشت. در عین حال، این انتها می‌تواند آزادانه حرکت کند.

به کمک بررسی ساده فوق و با توجه به شکلهای (2 - 9c) و (2 - 9d) می‌توان نتیجه گرفت که یک موج تنش کششی اعمال شده به یک میله، برای برآورده شدن شرط مرزی یک انتهای آزاد، می‌بایست به صورت تنش فشاری انعکاس یابد. بطریق مشابه، موج تنش فشاری پس از رسیدن به انتهای آزاد، به صورت کششی انعکاس خواهد یافت.



شکل (۹-۲)

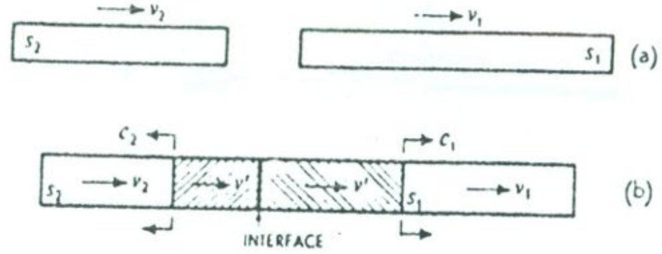
(ii) انتهای‌گیردار : در این حالت، مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم، با این تفاوت که به جای موج فشاری فرضی از موج کششی فرضی استفاده می‌شود. شکل (۱۰a - ۲). تلاقی این دوموج با یکدیگر باعث می‌شود که تنش در انتهای آن دو برابر شده، تغییر مکان آن به صفر برسد. با توجه به این که شرط مرزی انتهای‌گیردار جابه جائی صفر است، دیده می‌شود که این نوع ترکیب، شرایط مرزی را برآورد می‌کند. به عبارت دیگر، موج تنش کششی پس از رسیدن به انتهای‌گیردار به صورت کششی؛ موج فشاری به صورت فشاری انعکاس می‌یابد.



شکل (۱۰-۲)

۱۰-۲- برخورد هم محور دو میله با سطح مقطع مساوی با امپدانس متفاوت

فرض می‌شود دو میله S_1 و S_2 شکل (۱۱a - ۲) با سطح مقطع برابر و امپدانسهای (ρc) متفاوت با سرعتهای v_1 ، v_2 ($v_1 < v_2$) حرکت می‌کنند. دو سطح انتهائی میله‌ها صاف و مسطح می‌باشد. پس از برخورد [شکل (۱۱b - ۲)] دو موج تنش فشاری با سرعتهای c_1 ، c_2 در دو میله انتشار می‌یابد. قسمتهائی از دو میله که محصور بین دو پیشانی موج‌های تنش است، دارای سرعت برابر با v' شده و با توجه به اینکه سطح مقطع دو میله برابر است، بنابر اصل تساوی عمل و عکس‌العمل، تنش ایجاد شده در دو میله نیز برابر خواهد بود.



شکل (۱۱-۲)

در قسمتهای قبل رابطه $\sigma = \rho c v$ بین شدت تنش، چگالی و امپدانس جسم بدست آمد. این رابطه برای جسمی که سرعت اولیه آن صفر است و پس از عبور موج تنش σ سرعت آن به v می‌رسد صحیح است، در حقیقت، v در این رابطه سرعت نسبی می‌باشد. به عبارت دیگر، سرعت نسبی قسمتهائی از دو میله S_1 , S_2 که محصور بین دو پیشانی موج تنش است، به ترتیب $v' - v_1$, $v_2 - v'$ خواهد بود. v' سرعت جدید ذرات پس از القای موج تنش در میله‌ها می‌باشد.

بدین ترتیب، با توجه به بحث فوق، شرط تساوی تنش در دومیله به صورت زیر در می‌آید:

$$\sigma = \rho_1 c_1 (v' - v_1) = \rho_2 c_2 (v_2 - v')$$

در نتیجه:

$$v' = \frac{\rho_1 c_1 v_1 + \rho_2 c_2 v_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \qquad (۲-۱۴)$$

و:

$$\sigma = \frac{v_2 - v_1}{\dfrac{1}{\rho_1 c_1} + \dfrac{1}{\rho_2 c_2}} \qquad (۲-۱۵)$$

برخورد یک استوانه توپر با انتهای صاف با سطح آب

این قسمت به عنوان مثالی از بحث فوق است فرض می‌شود. که یک میله استوانه‌ای توپر با چگالی ρ_o و سرعت v_o با سطح آبی برخورد کند. تنش فشاری ایجاد شده در میله σ_o در نظر گرفته می‌شود و سرعت ذرات قسمتی از میله که موج تنش از آنها عبور کرده، برابر است با:

$$v = v_o - \frac{\sigma_o}{\rho_o c_o} \qquad (a)$$

در لحظه برخورد، v سرعت ذرات سطح آب (با صرفنظر کردن از اثر آب روی محیط میله) نیز خواهد بود. با در نظر گرفتن تنش ایجاد شده در آب به صورت σ_w و با فرض اینکه در این مساله پیچیده بتوان از رابطه (۷-۲) استفاده کرد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_w = \rho_w c_w v = \rho_w c_w \left(v_o - \frac{\sigma_o}{\rho_o c_o} \right) \qquad (b)$$

در روابط (a) و (b) زیرنویس o برای میله و زیرنویس w برای آب در نظر گرفته شده است.
حال با توجه به تساوی $\sigma_w = \sigma_o$ نتیجه می‌شود:

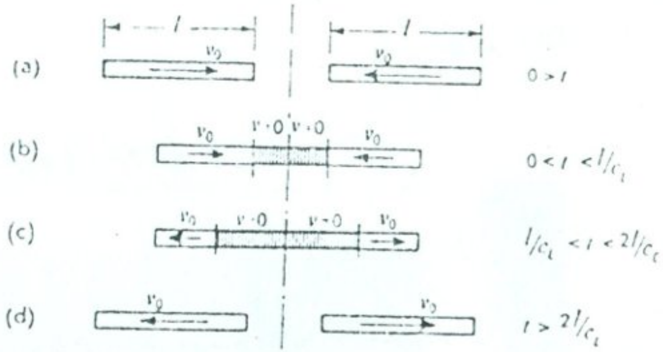
$$\sigma_o = \frac{\rho_w c_w v_o}{1 + \dfrac{\rho_w c_w}{\rho_o c_o}} = \frac{v_o}{\dfrac{1}{\rho_w c_w} + \dfrac{1}{\rho_o c_o}}$$

به عنوان یک مثال عددی اگر سرعت اولیه میله 2500 ft/sec فرض شود، تنش الاستیک در برخورد باسطح آب برابر خواهد شد با:

$$\sigma_o = 283000 \ \text{lbf/in}^2 \approx 126 \ \text{tonf/in}^2$$

۱۱ ـ ۲ ـ برخورد هم محور میله‌های یکسان

وقتی دو میله یکسان (با طول، مقطع و امپدانس برابر)، با سرعت برابر و درخلاف جهت یکدیگر حرکت کرده، در زمان $t = 0$ برخورد می‌کنند، به کمک بحث فوق و نتایج مربوط به انعکاس موجهای تنش می‌توان وضعیت تنش و سرعت در زمانهای مختلف، و زمان جدائی دومیله رابر آورد کرد. مراحل برخورد در شکل (۱۲ ـ ۲) نشان داده شده است:



شکل (۱۲ ـ ۲)

پس از برخورد، دو موج تنش فشاری با شدت $\sigma = \rho_0 c_0 v_0$ از سطح برخورد به طرف دو انتهای آزاد میله‌ها انتشار می‌یابد. این حالت، برای $0 < t < \frac{L}{c_0}$ در شکل (۱۲c ـ ۲) آورده شده است. سرعت قسمتهایی از میله که بین دو پیشانی موجهای تنش قرار دارد صفر است و در زمان $t = \frac{L}{c_0}$ دو میله کاملاً ساکن می‌شوند. در ضمن، در این زمان هر دو میله تحت تنش فشاری σ قرار خواهند داشت. به عبارت دیگر، در زمان $t = \frac{L}{c_0}$ انرژی جنبشی کلی دو میله (K) به انرژی کرنشی الاستیک (U) تبدیل می‌شود. در نتیجه :

$$K = \frac{1}{2}\,(\text{جرم میله‌ها})\, v_0^2 = 1/2\, A_0\, L\, \rho_0\, v_0^2 \qquad (a)$$

$$U = (\text{حجم میله‌ها}) \cdot \frac{\sigma^2}{2E} = 1/2\, A_0\, L\, \rho_0\, v_0^2 \qquad (b)$$

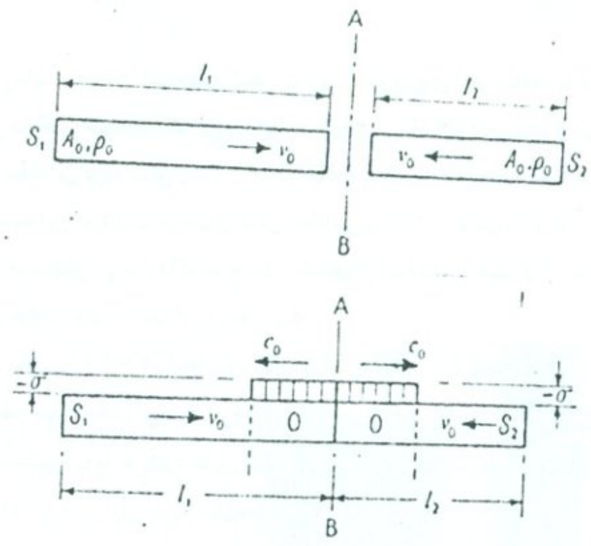
پس از زمان $t = L/c_0$ موجهای تنش فشاری از دو انتهای آزاد میله‌ها به صورت موجهای تنش کششی منعکس خواهند شد. این موجها، موجهای بی بار کننده هستند، و در اثر آنها تنش فشاری میله‌ها حذف می‌گردد شکل (۱۲c ـ ۲). در خاتمه زمان $t = 2L/c_0$ میله‌ها بدون تنش خواهند بود. با توجه به این که شدت موجهای تنش انعکاسی برابر شدت موجهای تنش فشاری اولیه است، سرعت قسمتهائی از میله‌ها که موج تنش فشاری از آن قسمتها عبور کرده است، v_0 بوده، برای دو میله در خلاف جهت یکدیگر خواهند بود.

پس از زمان $t = 2\,L/c_0$ میله‌ها بدون تنش و با سرعتهای v_0 گردیده، شکل (d ۱۲ ـ ۲)، در نتیجه، در خلاف جهت یکدیگر حرکت خواهند کرد. در نتیجه، یک بار دیگر انرژی کرنشی الاستیک به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. بدین ترتیب، زمان کلی برخورد $t = 2\,L/c_0$ بوده، و با توجه به بحث ارائه شده دربخش اول ضریب، بازگشت، برابر یک می‌شود ($c = 1$).

۱۲ ـ ۲ ـ برخورد دو میله از یک جنس و با طولهای نابرابر

دو میله S_1 , S_2 با طولهای L_1 , L_2 ، $L_2 < L_1$ از یک جنس با سرعتهای مساوی، در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، شکل (۱۳a ـ ۲). پس از برخورد، دو موج تنش فشاری با سرعت برابر در دو میله منتشر شده، قسمتهائی از دو میله که موج از آنها عبور می‌کند، مستوقف می‌گردند، شکل (۱۳b ـ ۲). شدت موج تنش فشاری در دو میله $\sigma = \rho_0\ c_0\, v_0$ می‌باشد. موجهای تنش فشاری پس از رسیدن به انتهای آزاد دو میله به صورت کششی انعکاس می‌یابد. در نتیجه، در مدت زمان $L_2/c_0 < t < 2L_2/c_0$ میله S_2 بدون تنش می‌گردد. در زمان $t = 2L_2/c_0$ میله S_2 بدون تنش بوده، سرعت همه قسمتهای آن v_0، و برخلاف جهت حرکت اولیه آن خواهد شد. باید توجه داشت که در این زمان، جدائی دو میله اتفاق نمی‌افتد. موج بی بار کننده از میله S_2 وارد میله S_1 شده، قسمتهای سمت راست موج در میله S_1 نیز دارای همان سرعت v_0 می‌شوند. جدائی در زمان $t = 2L_1/C_0$ اتفاق می‌افتد، که در آن زمان موج برگشتی از انتهای سمت چپ میله

S_1 سرعت v_0 را حذف می‌کند. اگر طول میله S_1 بینهایت باشد، تماس دو میله دائمی خواهد بود.



شکل (۱۳ - ۲)

اکنون ، توزیع انرژی برای زمان $t = 2L_2/c_0$ در میله‌های S_1 ، S_2 با شرط $2L_2 > L_1$ بررسی می‌شود، شکل (۱۴ - ۲).

(i) انرژی جنبشی در میله S_1 برابر با:

$$K_1 = \frac{1}{2} A_0 \rho_0 (2L_2 - L_1) v_0^2 \tag{a}$$

و در میله S_2 برابر با:

$$K_2 = \frac{1}{2} A_0 \rho_0 L_2 v_0^2 \tag{b}$$

خواهد بود.

(ii) انرژی کرنشی الاستیک در میله S_2 صفر و در میله S_1 برابر می‌شود با:

$$U_2 = 1/2\, A_0 [2(L_1 - L_2)] \frac{\sigma^2}{E}$$

$$= \frac{1}{2} A_0 [2(L_1 - L_2)] v_0^2 \frac{E\rho_0}{E}$$

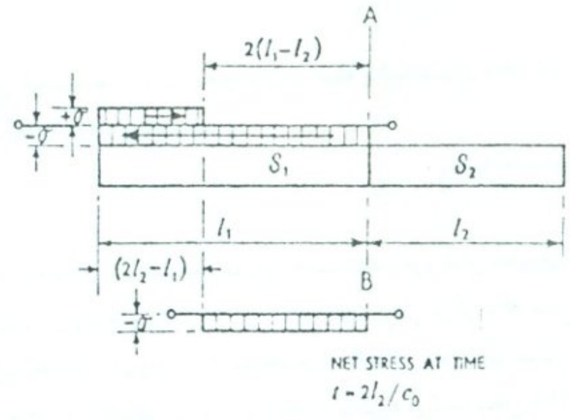
$$= \frac{1}{2} \rho_0 A_0 v_0^2 [2L_1 - 2L_2] \tag{c}$$

جمع کل انرژی در میله‌ها برابر خواهد شد با:

$$K_1 + K_2 + U_2 = \frac{1}{2} A_0 \rho_0 v_0^2 (L_1 + L_2) \tag{d}$$

که با مجموع انرژی جنبشی دو میله. قبل از برخورد برابر می‌شود

در بررسی انجام شده باید توجه داشت که در زمان $t = 2L_2/c_0$ کاهش انرژی جنبشی رخ می‌دهد. و این کاهش برابر با انرژی کرنشی ذخیره شده در میله S_2 خواهد بود.



شکل (۱۴ - ۲)

در حالت خاص اگر $L_1 = 2L_2$ باشد، در زمان $t = L_1/c_0$ همه میله S_1 تحت تنش فشاری قرار گرفته، سرعت آن صفر خواهد بود. در زمان $t = 1.5\ L_1/c_0$، S_1 بدون تنش می‌شود، چون در این زمان موج تنش کششی از دو انتها به وسط میله می‌رسد. نیمه سمت چپ میله S_1 دارای سرعت v_0 به سمت چپ، و نیمه سمت راست دارای همان سرعت به سمت راست خواهد بود. در زمان $t = 2L_1/c_0$ هر نیمه از میله در حال کشش، در زمان $t = 2.5\ L_1/c_0$ نیمه‌ها بدون تنش؛ و در زمان $t = 3\ L_1/c_0$ دوباره همه میله در حالت فشاری قرار خواهد گرفت. بنابراین، بعد از بی بار شدن S_2، سطح مرکزی S_1 همواره در حالت سکون بوده، اما دو نیمه آن متناوباً در حالت کشش و فشار خواهند بود.

ضریب بازگشت در برخورد میله‌های S_1 ، S_2 برای حالت $L_1 = 2L_2$ برابر با $e = 1/2$ خواهد بود. با مراجعه به بخش اول دیده می‌شود که اگر میله‌ها صلب فرض شوند، $e = 1$ بوده، و با این فرض سرعت میله S_1 پس از جدائی برابر با $1/3\ v_0$ به سمت چپ؛ و میله S_2 برابر با $5/3\ v_0$ به سمت راست میل خواهد کرد. طبیعی است که این نتیجه نادرست است و علت آن صرفنظر کردن از

انرژی کرنشی ذخیره شده در میله‌ها می‌باشد.

۱۳ ـ ۲ ـ انتقال انرژی و اندازه حرکت در برخورد سه میله یکسان

دو میله یکسان A و B با جرم m و طول L و سطح مقطع A_0 انتها به انتها در حال تماس و ساکن نگهداشته شده، و در انتهای آزاد یکی از میله‌ها توسط میله یکسان C با سرعت v_0 برخوردی رخ می‌دهد. محور سه میله در یک امتداد قرار دارد، شکل (۱۵ ـ ۲). حالت تنش و سرعت میله‌ها در زمانهای $t = 0$ و $t = L/c_0$ ، $t = 2L/c_0$ و $t = 3L/c_0$ بررسی شده و نشان داده می‌شود که همواره انرژی و اندازه حرکت ثابت می‌باشند.

(i) اندازه حرکت اولیه برابر است با mv_0 و انرژی جنبشی اولیه $1/2\ mv_0^2$ می‌باشد، شکل (a ۱۵ - ۲).

(ii) با توجه به شکل (۱۵b - ۲)، اندازه حرکت میله‌های B و C هریک $mv_0/2$ بوده، در نتیجه جمع آنها mv_0 خواهد بود. انرژی جنبشی در هر یک از میله‌های B ، C برابر است با $½\ m(v_0/2)^2$ و انرژی کرنشی در هر کدام برابر خواهد شد با:

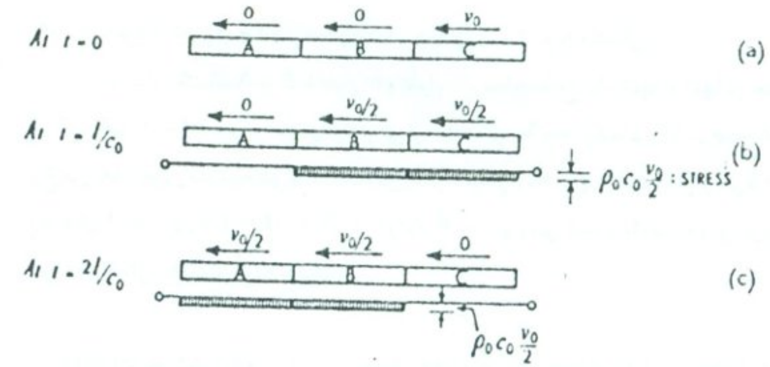
$$\text{حجم میله} \times \frac{\sigma^2}{2E} = A_0 L\ [\rho_0 c_0 (v_0/2)]^2/_{2E} = A_0 L\ \frac{\rho_0^2 c_0^2 v_0^2/4}{2E} = m\ v_0^2/8$$

بنابراین جمع انرژی جنبشی و کرنشی دو میله B ، C برابر می‌شود با:

$$= 2 \times 1/2\ m\ \frac{v_0^2}{4} + 2 \times m\ \frac{v_0^2}{8} = 1/2\ m\ v_0^2$$

که برابر با همان انرژی جنبشی اولیه می‌باشد.

(iii) با مراجعه به شکل (۱۵c - ۲) دیده می‌شود که در این حالت میله C بدون تنش و ساکن بوده، شرایط تنش و سرعت در میله‌های A ، B مشابه میله‌های B ، C [مطابق شکل (۱۵b - ۲)] می‌باشد. در نتیجه، توزیع انرژی و اندازه حرکت مثل حالت (ii) خواهد بود.



شکل (۱۵ - ۲)

(iv) در زمان $t = 2L/c_o$ میله C بدون تنش و ساکن بوده، اما میله‌های A , B تحت تنش فشاری و دارای سرعتهای $v_o/2$ به سمت چپ خواهند بود، شکل (۱۵c - ۲). پس از آن یک موج کششی از سمت راست میله B به سمت چپ حرکت کرده و موج انعکاسی کششی دیگری نیز از انتهای سمت چپ میله A به سمت راست حرکت خواهد کرد.

در نتیجه، در زمان $t = 3L/c_o$ این دو میله نیز بدون تنش شده، میله B ساکن و میله A دارای سرعت v_o به سمت چپ خواهد بود، شکل (2 - 15d). بدین ترتیب، هر سه میله بدون تنش بوده سرعت دو میله C , B صفر و میله A برابر با v_o به سمت چپ است. به عبارت دیگر، انرژی جنبشی و اندازه حرکت اولیه میله C به میله A منتقل گردیده است.

۱۳ - ۲ - برخورد سه میله با امپدانسهای نامساوی. مثالی برای انتقال انرژی و اندازه حرکت

در این قسمت بحث قسمت قبل برای سه میله با امپدانسهای (ρc) نابرابر دنبال می‌شود. برای سهولت بحث فرض می‌شود که:

$$T = L_1/c_1 = L_2/c_2 = L_3/c_3$$

که در آن L , c به ترتیب نشان دهنده طول و سرعت انتشار موج تنش محوری، و زیرنویسهای 3، 2 , 1 به ترتیب مربوط به میله‌های 1 , 2 , 3 می‌باشد. فرض می‌گردد که سطح مقطع سه میله یکسان و برابر A_o است. در زمان $t = 0$ میله‌های 2 , 3 ساکن و در حال تماس با یکدیگر بوده، و میله ۱ با سرعت v_o با انتهای سمت راست میله ۲ برخورد می‌کند، شکل (۱۶a - ۲). در بررسی زیر در زمانهای T , 2T و 3T شدت تنش و سرعت ذرات (یا تغییر سرعت ذرات) محاسبه شده، و در زمان 3T نشان داده خواهد که چگونه انرژی جنبشی و اندازه حرکت میله ۱ بین سه میله توزیع گردیده است.

شکلهای (۱۶a - ۲) , (۱۶b - ۲) موقعیت تنش و سرعت در سه میله را برای زمانهای $t = 0$, $t = T$ نشان می‌دهد. پس از برخورد، تنش فشاری در میله‌های ۱ و ۲ برابر می‌شود. در نتیجه:

$$\sigma_1 = \rho_1 c_1 (v_o - v_2)$$

$$\sigma_2 = \rho_2 c_2 v_2$$

و از طرفی

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

در روابط فوق v_2 سرعت ذرات میله ۲ در اثر عبور تنش σ_2 می‌باشد. در نتیجه:

$$v_2 = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} v_o \qquad \text{(a)}$$

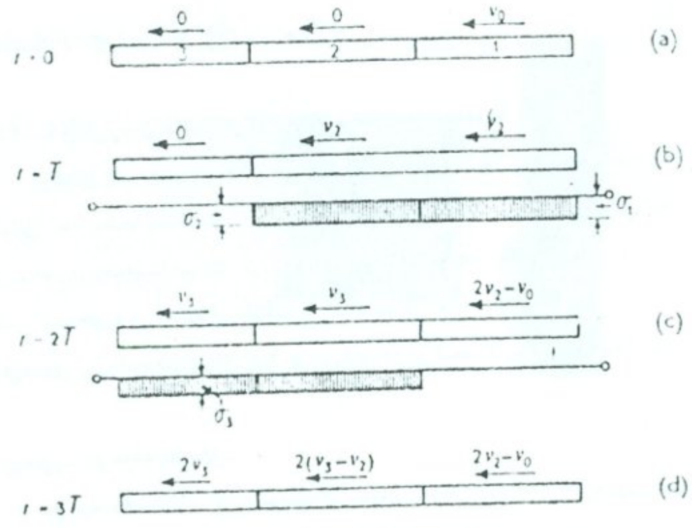
و

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\rho_1 c_1 \cdot \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}\, v_\circ \qquad \text{(b)}$$

با توجه به فرض اولیه، پیشانی تنش در میله‌های ۱ و ۲ پس از زمان T به دو انتهای آنها خواهد رسید. برای زمان $T < t < 2T$ موقعیت به گونه زیر خواهد بود:

(i) موج تنش فشاری پس از زمان $t = T$ از انتهای سمت راست آن به صورت موج تنش کششی منعکس می‌شود، در نتیجه در زمان $t = 2T$ این میله بدون تنش خواهد شد، شکل (۲-۱۶c). در ضمن، ذرات این میله با سرعتی که در زیر آمده، به سمت چپ حرکت می‌کند:

$$v_2 - (v_\circ - v_2) = 2\,v_2 - v_\circ = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \cdot v_\circ \qquad \text{(c)}$$



شکل (۱۶-۲)

(ii) با توجه به اینکه تنش در سطح مشترک میله‌های دوم و سوم باید برابر باشد، اگر سرعت ذرات میله سوم در اثر شدت تنش σ_3 برابر با v_3 فرض شود، نتیجه می‌شود:

$$\sigma_3 = \rho_3 c_3 v_3$$

و

$$\sigma'_2 = \rho_2 c_2 (v_2 - v_3)$$

از طرف دیگر

$$\sigma_3 = \sigma_2 + \sigma'_2$$

در نتیجه:

$$v_3 = \frac{2\,\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3}\, v_2$$

با استفاده از رابطه (a)، v_3 برابر خواهد شد با:

$$v_3 = \frac{2\rho_1 c_1 \cdot \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)\,(\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3)}\, v_\circ \qquad \text{(c)}$$

و تنش σ_3 برابر می‌شود با:

$$\sigma_3 = \frac{2\rho_1 c_1 \cdot \rho_2 c_2 \cdot \rho_3 c_3}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)\,(\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3)}\, v_\circ \qquad \text{(d)}$$

در زمان $t = 2T$ سرعت میله‌های دوم و سوم برابر v_3 خواهد بود.

برای اینکه بعداز $t > 2T$ بین میله اول و دوم نیرونی وجود نداشته باشد، یا به عبارت دیگر، جدائی اتفاق افتد، باید شرط زیر برقرار باشد:

$$2\,v_3 - 2v_2 > 2v_2 - v_\circ$$

یا:

$$v_\circ > 2(2\,v_2 - v_3)$$

با استفاده از روابط (a) و (c) این شرط به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}\right)\left(1 + \frac{\rho_3 c_3}{\rho_2 c_2}\right) > 4\,\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \cdot \frac{\rho_3 c_3}{\rho_2 c_2} \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

(iii) در زمان $3T = t$، با فرض این که میله اول کاملاً بی بار شده است، انرژی جنبشی و اندازه حرکت آن به ترتیب برابر خواهند شد با:

$$K_1 = \frac{1}{2} A_o L_1 \rho_1 \left[\frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} v_o \right]^2 \qquad (e)$$

و

$$M_1 = A_o L_1 \rho_1 v_o \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} \qquad (f)$$

در این روابط که $i_1 = \rho_1 c_1$ و $i_2 = \rho_2 c_2$ می‌باشد.

میله دوم نیز در زمان $3T = t$ بی بار شده و سرعت آن برابر است با:

$$v_3 - (2v_2 - v_3) = 2(v_3 - v_2) = 2i_1 (i_2 - i_3) v_o / (i_1 + i_2)(i_2 + i_3)$$

که در آن $i_3 = \rho_3 c_3$ می‌باشد. در نتیجه، انرژی جنبشی و اندازه حرکت آن برابر خواهد شد با:

$$K_2 = \frac{1}{2} A_o L_2 \rho_2 \left[\frac{2i_1 (i_2 - i_3)}{(i_1 + i_2)(i_2 + i_3)} v_o \right]^2 \qquad (g)$$

و

$$M_2 = A_o L_2 \rho_2 \left[\frac{2i_1 (i_2 - i_3)}{(i_1 + i_2)(i_2 + i_3)} v_o \right] \qquad (h)$$

میله سوم نیز بدون بار بوده، سرعت آن $2v_3$ خواهد بود. در نتیجه، انرژی جنبشی و اندازه حرکت آن برابر می‌شود با:

$$K_3 = \frac{1}{2} A_o L_3 \rho_3 \left[\frac{4i_1 i_2}{(i_1 + i_2)(i_2 + i_3)} v_o \right]^2 \qquad (i)$$

و

$$M_3 = A_o L_3 \rho_3 \left[\frac{4i_1 i_2}{(i_1 + i_2)(i_2 + i_3)} v_o \right] \qquad (j)$$

با استفاده از روابط (e)، (g) و (i) جمع انرژی جنبشی در سه میله برابر خواهد شد با:

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1/2\, m v_o^2 \qquad (k)$$

با توجه به اینکه جرم میله اول برابر $m = A_o L_1 \rho_1$ است، جمع انرژی سه‌میله برابر انرژی جنبشی اولیه میله اول خواهد بود.

به طریق مشابه، با استفاده از روابط (f)، (h) و (j) جمع اندازه حرکت سه میله برابر می‌شود با:

$$M_1 + M_2 + M_3 = m v_o$$

که برابر اندازه حرکت اولیه میله اول می‌باشد.

۱۵ـ۲ ـ نمودار زمان ـ فضا برای برخورد هم محور میله‌ها

برخورد هم محور میله‌ها را می‌توان به سهولت به کمک نمودار زمان - فضا که نمودار "لاگرانژ"[1] یا "صفحه مشخصه"[2] نیز نامیده می‌شود، نشان داد. این نمودار برای نشان دادن توزیع تنش محوری وضعیت سرعت ذرات در برخورد هم محور میله‌ها مفید بوده، برداشت واضح و روشنی از برخورد در زمانهای مختلف را به دست می‌دهد.

کاربرد نمودار زمان ـ فضا برای چند برخورد ساده در قسمت زیر آورده شده است.

(i) برخورد دو میله یکسان:

دو میله یکسان I , II با سرعتهای مساوی v_o در زمان $0 = t$ برخورد می‌کنند. نمودار پیشروی تنش در این دو میله در شکل (۱۷a – ۲) نشانداده شده است.

OA_1 و OA_2 به ترتیب پیشرفت موجهای تنش فشاری در میله‌های I , II می‌باشد. در زمان $t_1 = L/c_o$ موجها به نقاط A_1 و A_2 (انتهای آزاد میله‌ها) می‌رسد و در زمان $t_2 = 2L/c_o$ موجهای

1 -Lagrange diagram

2 - Charactristic diagram

تنش کششی منعکس شده، یکدیگر را در B قطع می‌کنند. در این زمان دو میله بی بار شده و با سرعت v_0 از یکدیگر جدا می‌شوند.

باید توجه داشت که در نمودار t - x، شیب خط نشان‌دهنده سرعت موج c_0 می‌باشد

(ii) برخورد سه میله یکسان

دو میله یکسان I , II در حالت انتها به انتها و در حال تماس و ساکن قرار دارند. میله سوم III با همان مشخصات در زمان $t = 0$ به انتهای راست میله II برخورد می‌کند. نمودار t - x برای این برخورد در شکل (۱۷b - ۲) نشان داده شده است. OA_1 ، OA_2 نشان‌دهنده موجهای تنش فشاری برای زمان $0 \leq t \leq L/c_0$ می‌باشد. برای زمان $L/c_0 < t < 2L/c_0$ موج تنش فشاری OA_2 به صورت A_2A_3 در میله اول ادامه می‌یابد، و حال آنکه، A_1B به صورت موج تنش بی‌بارکننده از انتهای میله سوم منعکس می‌شود. در زمان $2L/c_0 < t < 3L/c_0$ موج تنش بی‌بارکنند. A_1B به صورت BC در میله دوم ادامه یافته، موج تنش فشاری A_2A_3 به صورت موج تنش کششی A_3C از انتهای آزاد میله اول انعکاس می‌یابد.

بدین ترتیب در زمان $t_1 = 3L/c_0$ هر سه میله بدون تنش می‌باشند. میله‌های II , III ساکن بوده میله I با همان سرعت اولیه میله III جدا شده و به سمت چپ حرکت می‌کند.

(iii) برخورد چهار میله:

سه میله یک نواخت در حال تماس و ساکن قرار دارد و در زمان $t = 0$ میله چهارم به همان مشخصات ولی با طول دو برابر، با انتهای آزاد یکی از میله‌ها برخورد می‌کند. نمودار زمان - فضا برای این برخورد در شکل (۱۷c - ۲) نشان داده شده است.

در این حالت توزیع سرعت در قسمتهای مختلف میله‌ها نیز در نمودار آورده شده است. با نشان دادن سرعت v_0 به صورت واحد، اعداد نشان داده شده در شکل (۱۷c - ۲) مشخص کننده سرعت میله‌ها می‌باشد. با بررسی نمودار نتایج ذیل به دست می‌آید:

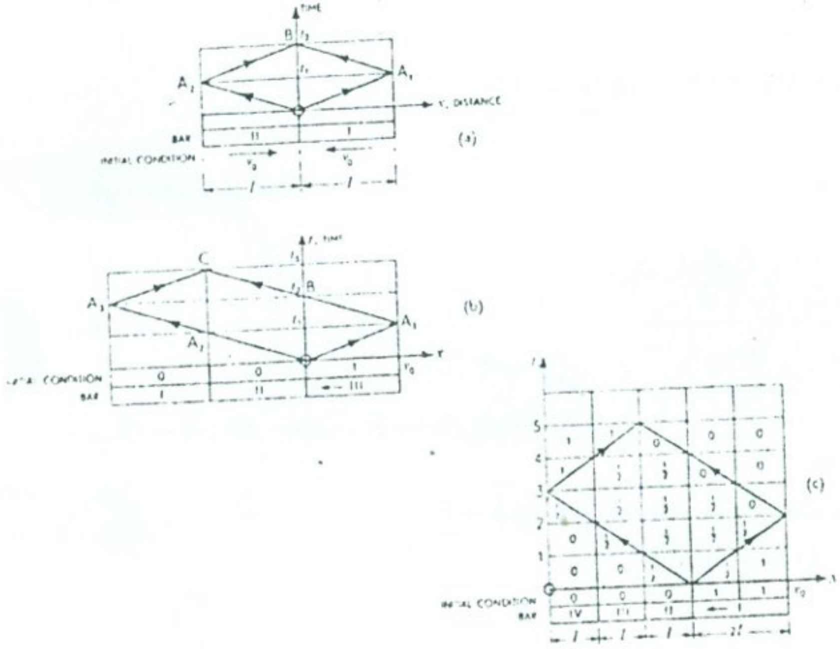
میله I تا زمان $2L/c_0$ تحت تنش فشاری قرار دارد در زمان $4L/c_0$ بدون تنش شده و ساکن می‌گردد.

میله II تا زمان $4L/c_0$ تحت فشاری قرار داشته، در زمان $5L/c_0$ بدون تنش گردیده، سرعت آن صفر می‌شود.

میله III از زمان L/c_0 تا $4L/c_0$ تحت تنش فشاری قرار گرفته ، در زمان $5L/c_0$ بدون تنش می‌شود. در ضمن، پس از زمان $5L/c_0$ سرعت آن v_0 می‌شود.

میله IV از زمان $\frac{2L}{c_0}$ تا $4L/c_0$ تحت تنش فشاری بوده و در زمان $\frac{5L}{c_0}$ بدون تنش می‌شود. این میله پس از زمان $\frac{5L}{c_0}$ دارای سرعت v_0 خواهد بود.

بدین ترتیب در $t = 5L/c_0$ همه میله‌ها بدون تنش خواهند بود. میله‌های I , II ساکن بوده، میله‌های III و IV با سرعت v_0 به سمت چپ حرکت خواهند کرد.



شکل (۱۷-۲)

۱۶-۲- برخورد هم محور دو میله با جنس‌های متفاوت و سطح مقطع نامساوی

دو میله S_1 و S_2 با طولهای L_1 و L_2 و سطح مقطع‌های A_1 ، A_2 با جنس‌های مختلف که با سرعتهای v_1 , v_2 در یک سمت حرکت می‌کنند، [شکل (۱۸ - ۲)] با فرض $v_1 > v_2$ در زمان

$t = 0$ برخورد می‌کنند. پس از برخورد و در زمان $0 < t < \frac{L_1}{c_1}, \frac{L_2}{c_2}$ سرعت قسمتهائی از دو میله که موجهای تنش فشاری از آن عبور کرده، v_0 در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به تساوی نیروی بین دو میله در برخورد، و با فرض تنش‌های فشاری به صورت σ_1 و σ_2 تساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$A_1 \sigma_1 = A_2 \sigma_2$$

$$A_1 \rho_1 c_1 (v_1 - v_0) = A_2 \rho_2 c_2 (v_0 - v_2)$$

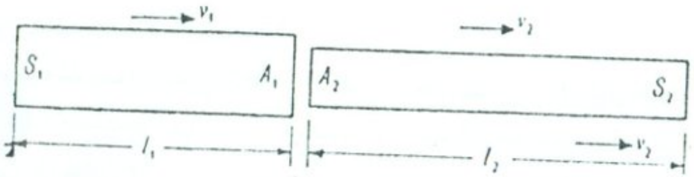
در نتیجه v_0 برابر می‌شود با:

$$v_0 = \frac{v_2 + \frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2} v_1}{1 + \frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2}} \qquad (۲-۱۸)$$

بدین ترتیب تنش‌های حاصل در دو میله برابر خواهند شد با:

$$\sigma_1 = \frac{\rho_1 c_1 v_1}{\left(1 + \frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2}\right)} \left[1 - \frac{v_2}{v_1}\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_2 c_2 v_2}{1 + \left(\frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2}\right)} \left[\frac{v_1}{v_2} - 1\right] \frac{A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2} \qquad (۲-۱۹)$$



شکل (۱۸-۲)

در حالت خاص اگر میله‌ها از یک جنس باشند، $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$، با فرض $A_1 / A_2 = \mu$ نتیجه می‌شود:

$$v_0 = \frac{v_2 + \mu v_1}{1 + \mu}$$

در این حالت برای اینکه سرعت برخورد صفر شود $v_0 = 0$، باید بین سرعتهای اولیه رابطه $v_2 = -\mu v_1$ برقرار باشد.

اگر $L_1 = 2L_2$ و $\rho_1 = \rho_2$ باشد، در زمان $t = 2L_2/c_2$ میله S_2 بدون بار شده، میله S_1 ساکن گردیده، تحت تنش فشاری قرار می‌گیرد. بنابراین، برای $t > 2L_2/c_2$، S_2 بدون تنش و با سرعت $(2v_0 - v_2)$ جدا شده، مرکز میله S_1 همواره ساکن خواهد بود. اگر ضریب بازگشت در این شرایط نسبت به مرکز دومیله e فرض گردد، در نتیجه:

$$2v_0 - v_2 = -e (v_2 - v_1)$$

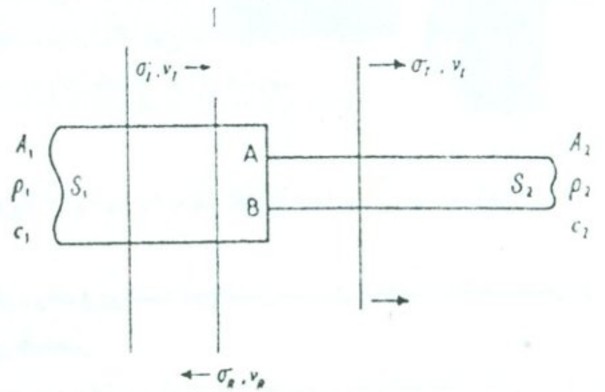
یا:

$$e = \frac{-2\,\dfrac{(v_2 + \mu v_1)}{1 + \mu} + v_2}{v_2 - v_1} = \frac{\mu}{1 + \mu}$$

اگر $\mu = 1$ باشد، e برابر 1/2 خواهد شد.

۱۷ـ۲ ـ انتقال تنش محوری در میله‌هائی که دارای ناپیوستگی در سطح مقطع هستند، و میله‌هایی با دو جنس مختلف

میله‌ای مطابق شکل (۱۹ - ۲) از دو قسمت S_2 , S_1 با جنس‌های مختلف و با سطوح مقطع A_1 و A_2 در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که موج تنش ورودی به شدت σ_I در قسمت S_1 و به سمت راست حرکت می‌کند. قسمتی از این موج تنش فشاری الاستیک پس از رسیدن به مقطع مشترک AB، به قسمت S_2 منتقل شده و قسمتی از آن در S_1 منعکس خواهد شد. باید توجه داشت که اگر A_2 صفر باشد همه موج تنش منعکس می‌گردد و اگر دو قسمت یکسان و دارای سطح مقطع برابر باشند همه موج تنش منتقل خواهد گردید. با توجه به اینکه در حالت مورد بحث، S_1 و S_2 از دو جنس مختلف بوده، دارای دو سطح مقطع متفاوت هستند، قسمتی از موج تنش ورودی منتقل و قسمتی منعکس خواهد شد.



شکل (۱۹ - ۲)

شدت موج انتقالی به S_2، σ_T و شدت موج برگشتی به S_1، σ_R را می‌توان با استفاده از دو شرط تعادل نیرو و پیوستگی زیر به دست آورد:

(i) نیروی روی سطح AB از دو قسمت S_2 , S_1 همواره برابرند.

(ii) سرعت ذرات روی AB در دو قسمت S_2 , S_1 برابر می‌باشند.

با فرض این که σ_T , σ_R نشاری هستند، شرط اول به صورت زیر در می‌آیند:

$$A_1 (\sigma_I + \sigma_R) = A_2 \sigma_T \qquad \text{(a)}$$

از شرط دوم نیز رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_I - v_R = v_T \quad \text{یا} \quad \frac{(\sigma_I - \sigma_R)}{\rho_1 c_1} = \frac{\sigma_T}{\rho_2 c_2} \qquad \text{(b)}$$

در رابطه فوق v سرعت و زیرنویسهای I , R , T به ترتیب برای موجهای ورودی، برگشتی و انتقالی بکار رفته‌اند.

با حل روابط (a) , (b) نتیجه خواهد شد که:

$$\sigma_T = \frac{2A_1 \rho_2 c_2}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1}\sigma_I \qquad (۲ - ۲۰)$$

و

$$\sigma_R = \frac{A_2 \rho_2 c_2 - A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1}\sigma_I \qquad (۲ - ۲۱)$$

رابطه (۲۱ - ۲) نشان می‌دهد که اگر دو قسمت S_2 , S_1 از یک جنس باشند، $c_1 = c_2 , \rho_1 = \rho_2$ اگر در AB سطح مقطع زیادتر شود تنشهای ورودی و برگشتی هم علامت، و اگر کمتر شود مختلف العلامت خواهند بود، و در همان حال، با توجه به رابطه (۲۰ - ۲) شدت موج تنش انتقالی بزرگتر و یا کوچکتر از شدت موج تنش ورودی خواهد بود.

روابط به‌دست آمده با توجه به فرض‌هائی که قبلاً در رابطه با موجهای تنش محوری ارائه شد و با توجه به اینکه قسمتی از سطح مقطع S_1 و یا S_2 در AB به صورت سطح آزاد است، تقریبی

می‌باشد. در حقیقت، در مقطع AB و در قسمتهای نزدیک آن تداخل امواج تنش بسیار پیچیده خواهد بود.

با توجه به روابط (۲۰ - ۲) و (۲۱ - ۲) اگر دو قسمت میله از یک جنس باشند، $E_1 = E_2$ ، $c_1 = c_2$ و $\rho_1 = \rho_2$ است. در نتیجه:

(a) اگر $A_2/A_1 \to 0$ ، انتهای میله عملاً انتهای آزاد است و $\sigma_T \to 2\sigma_I$ ، $\sigma_R \to -\sigma_I$ ،

(b) اگر $A_2/A_1 \to \infty$ ، انتهای میله مشابه انتهای گیردار می‌باشد و $\sigma_T \to 0$ ، $\sigma_R \to \sigma_I$.

نتایج فوق نشان می‌دهد که یک میله کوچک، در انتهای یک میله با سطح مقطع بزرگتر می‌تواند به عنوان یک ضربه‌گیر بکار رود. در ضمن "ضریب بزرگ نمایی" برای میله‌ای با یک ناپیوستگی هندسی، با توجه به نتیجه (a) برابر با 2 است.

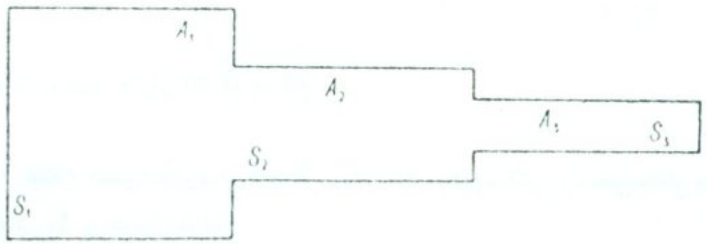
در مثال زیر اثر دو نا پیوستگی هندسی روی تنش انتقالی بررسی شده و نشان داده می‌شود که وجود یک قسمت رابط بین قسمتهای اولیه و انتهائی، باعث ازدیاد ضریب بزرگنمائی خواهد شد.

در شکل (۲۰ - ۲) فرض می‌شود که $A_1/A_3 = 4$ ، $A_1/A_2 = A_2/A_3 = 2$ باشد. برای یک موج تنش فشاری ورودی با شدت σ_I، تنش انتقالی σ_{T2} در قسمت با سطح مقطع A_2 برابر می‌شود با:

$$\frac{\sigma_{T2}}{\sigma_I} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} = \frac{2\times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

و تنش انتقالی به قسمت S_3 ، σ_{T3} برابر خواهد شد با:

$$\sigma_{T3} = \frac{2A_2}{A_2 + A_3} \cdot \sigma_{T2} = \frac{2\times 2}{2+1} \times \frac{4}{3}\,\sigma_I = 1.78\sigma_I$$



شکل (۲۰-۲)

اگر قسمت S_2 حذف شود، در اثر تغییر سطح از A_1 به A_3 تنش انتقالی برابر می‌شود با:

$$\sigma_{T3} = \frac{2A_1}{A_1 + A_3}\,\sigma_I = \frac{2\times 4}{4+1} \cdot \sigma_I = 1.60\,\sigma_I$$

بنابراین، با اضافه کردن یک پله بینابینی شدت تنش حدود 10 % افزایش می‌یابد.

یک نتیجه جالب برای اینکه موج برگشتی در یک ناپیوستگی صفر گردد. $\sigma_R = 0$، این است که $A_2\,\rho_2\,c_2 = A_1\,\rho_1\,c_1$ باشد، در این صورت:

$$\sigma_T = \sigma_I + \sqrt{E_2\,\rho_2 / E_1\,\rho_1}$$

شرط $A_1\,\rho_1\,c_1 = A_2\,\rho_2\,c_2$ به نام "انطباق امپدانس"[1] نامیده می‌شود.

۱۸ - ۲ - تداوم رفت و برگشت موج تنش محوری و تغییرات شدت تنش در میله‌ای با یک ناپیوستگی هندسی

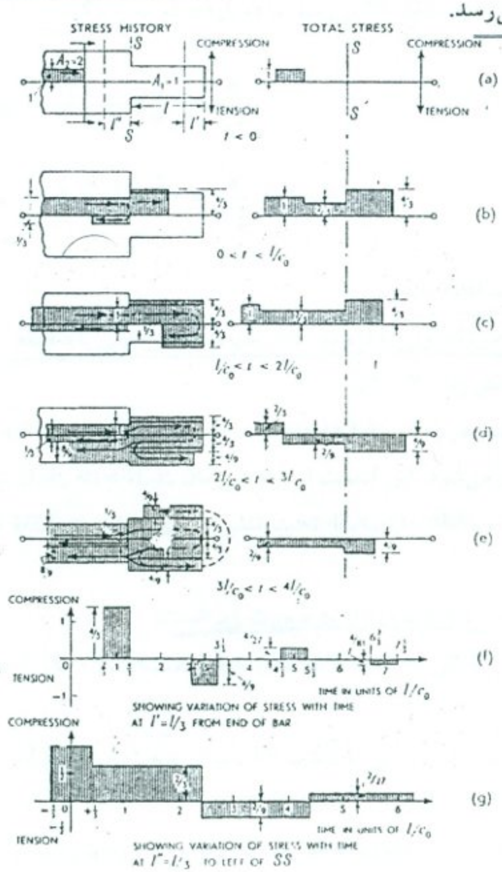
برای بررسی رفت و برگشت موج محوری و تغییرات شدت تنش در اثر ترکیب موجهای تنش رفت و برگشت، میله بسیار بلندی که در انتهای آن ناپیوستگی هندسی از سطح مقطع A_2 به

1 - impednce matching

A_1 وجود دارد در نظر گرفته می‌شود، شکل (۲۱a - ۲). سطح مقطع A_2 برابر 2 واحد و سطح مقطع A_1 برابر واحد است و فرض می‌شود که یک موج تنش فشاری به شدت واحد در قسمت یکنواخت میله و به سمت راست حرکت می‌کند، طول قسمت انتهائی میله L می‌باشد. تغییرات موج تنش و رفت و برگشت آن تا زمان $t = 5L/C_o$ در شکل (۲۱ - ۲) نشان داده شده است. شکل (۲۱ - ۲) شامل دو نمودار است. نمودار سمت چپ رفت و برگشت موجهای تنش روی میله‌ها و نمودار سمت راست نتیجه تنش را نشان می‌دهد.

(i) $t<o$ ، شکل (۲۱a - ۲)

وضعیت اولیه تنش برای $o > t$ در این شکل آورده شده است. باید توجه داشت که $t = o$ زمانی است که موج تنش به مقطع SS می‌رسد.



شکل (۲۱ - ۲)

(ii) $o<t<L/C_o$ ، شکل (۲۱ b - ۲)،

پس از رسیدن موج تنش به ناپیوستگی هندسی SS قسمتی از موج با شدت σ'_T منتقل شده، قسمتی هم با شدت σ'_R به قسمت اصلی میله منعکس می‌گردد. شدت موجهای انتقالی و برگشتی با توجه به روابط (۲۰ - ۲) , (۲۱ - ۲) برابر خواهند شد با:

$$\sigma'_T = \frac{2 \times 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

و

$$\sigma'_R = \frac{1 - 2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

باید توجه داشت که علامت منفی نشاندهنده تغییر علامت تنش است. به عبارت دیگر، با توجه به اینکه موج تنش ورودی فشاری در نظر گرفته شده است، σ'_R در این حالت، تنش کششی خواهد بود.

(iii) $L/c_o<t<2L/c_o$ ، شکل (۲۱c - ۲)،

σ'_T در زمان $t = L/c_o$ با تغییر علامت از انتهای آزاد میله منعکس می‌شود، و در زمان $t = 2L/co$ قسمت انتهائی میله بدون تنش خواهد بود.

(iv) $2L/c_o < t<3L/c_o$ ، شکل (۲۱ d - ۲)

در زمان $t = 2L/c_o$ موج کششی انعکاسی از انتهای میله به مقطع SS می‌رسد. در نتیجه، در $t > \frac{2L}{C_o}$ قسمتی از این موج تنش به قسمت با سطح کوچکتر منعکس می‌گردد. شدت این موج برگشتی برابر است با:

$$\sigma''_R = \frac{2 - 1}{2 + 1} \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}$$

قسمت دیگری از این موج با شدت زیر منتقل می‌شود:

$$\sigma''_T = \frac{2 \times 1}{2 + 1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{9}$$

(v) $3L/c_\circ < t < 4\ L/c_\circ$ شکل (۲ – ۲۱ e)

موج با شدت σ''_R با تغییر علامت از انتهای آزاد میله منعکس می‌شود.

(vi) $4L/c_\circ < t < 5L/c_\circ$

موج منعکس شده فشاری با شدت 4/9 به مقطع SS می‌رسد اما دوباره به دو موج برگشتی و انتقالی با شدتهای زیر تقسیم می‌شود:

$$\sigma'''_R = \frac{2 - 1}{2 + 1}\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{27}$$

$$\sigma'''_R = \frac{2 \times 1}{2 + 1}\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{27}$$

این پدیده تا زمان بی نهایت می تواند ادامه یابد.

حال تغییرات تنش در دو مقطع خاص، که اولی با فاصله L' از انتهای آزاد و دومی با فاصله L'' در سمت چپ SS، بررسی می‌شود، شکل (۲ – ۲۱ a).

قسمت انتهائی میله با مقطع کوچکتر، در زمان $o<t<L/c_\circ$ تحت تنش فشاری باشدت 4/3 قرار گرفته، که در زمان $t = 2L/c_\circ$ بی بار می‌شود. این قسمت از میله در زمان $2L/c_\circ < t < 4L/c_\circ$ تحت تنش کششی با شدت 4/9 و در زمان $4L/c_\circ < t < 6L/c_\circ$ تحت تنش فشاری با شدت 4/27 قرار خواهد گرفت.

وضعیت تنش برای مقطعی با فاصله L' از انتهای ازاد به صورت زیر است:

* برای زمان $2L'/c_\circ$ تحت تنش کششی به شدت 4/3، برای بقیه زمان $2\ (L - L')/c_\circ$ تحت تنش صفر.

* دوباره برای زمان $2L'/c_\circ$ تحت تنش کششی به شدت 4/9 ، برای بقیه زمان $2(L - L')/c_\circ$ تحت تنش صفر.

* و بالاخره برای زمان $2L'/c_\circ$ تحت تنش فشاری به شدت 4/27، برای بقیه زمان $2(L - L')/c_\circ$

تحت تنش صفر.

نمودار تنش در این مقطع برای حالت $L' = L/3$ در شکل (۲ – ۲۱ f) آورده شده است.

وضعیت تنش برای مقطعی از میله با سطح ۲ واحد و با فاصله L'' از SS بگونه زیر می‌باشد:

$$\sigma = 1 \quad ، \quad t > -L''/c_\circ$$

$$\sigma = 1 \quad ، \quad o < t < L''/c_\circ$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad ، \quad L''/c_\circ < t < L'' + 2L)/c$$

$$\sigma = \frac{2}{3} - \frac{8}{9} = -\frac{2}{9} \quad ، \quad (L'' + 2L)/c_\circ < t < L'' + 4L)/c_\circ$$

و

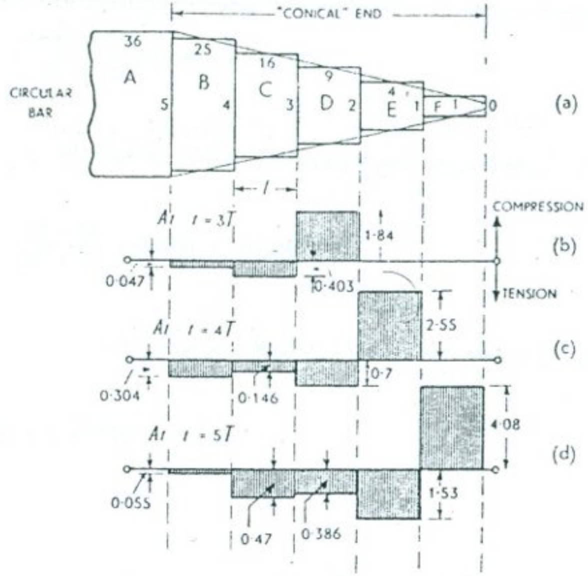
$$\sigma = -\frac{2}{9} + \frac{8}{27} = \frac{2}{27} \quad ، \quad (L'' + 4L)/c_\circ < t < L'' + 6L)/c_\circ$$

برای حالت $L'' = L/3$ تغییرات تنش در این مقطع مطابق شکل (۲ – ۲۱g) خواهد بود.

۱۹ـ۲ ـ موجهای تنش محوری در یک میله تقریباً مخروطی

بررسی کامل انتشار تنش در یک میله مخروطی در بخش چهارم ذکر خواهد شد. در این قسمت، پیشروی یک موج تنش فشاری با شدت واحد که به طرف رأس مخروط حرکت می‌کند، مورد تحلیل تقریبی قرار می‌گیرد.

انتهای یک میله به صورت مخروطی پله‌ای مطابق شکل (۲ – ۲۲a و) در نظر گرفته می‌شود. طول هر قسمت L سطح مقطع هر کدام مربع شماره ردیف آن قسمت نسبت به انتها فرض می‌شود. در ضمن در بررسی زیر، طول هر قسمت در مقایسه با قطر آن بزرگ فرض می‌گردد.



شکل (۲۲ - ۲)

$T = \frac{l}{c}$

یک موج پله‌ای به شدت واحد و به طول L در قسمت A و به سمت راست حرکت کرده، که در زمـان $t=0$ به مقطع 5 می‌رسد. با استفاده از روابط (۲۰ - ۲) و (۲۱ - ۲) انتشار موج به طرف رأس مخروط، و تغییرات شدت تنش نسبت به ضرایبی از زمان T؛ زمانی که موج تنش طول یک قسمت را طی می‌کند، به صورت زیر خواهد بود:

$t = o$ (i)

به محض آنکه، موج تنش ورودی به مقطع 5 برسد، یک موج برگشتی به شدت σ_{R5} و یک موج انتقالی به شدت σ_{T5} ایجاد می‌شود. با توجه به روابط بیان شده، این دو موج برابر می‌شوند با:

$$\sigma_{T5} = \frac{2 \times 36}{25 + 36} 1 = 1.18$$

$$\sigma_{R5} = \frac{25 - 36}{25 + 36} 1 = -0.18$$

$t = T$ (ii)

در این زمان موج انتقالی σ_{T5} به مقطع 4 می‌رسد، و در نتیجه، دو موج انتقالی و برگشتی σ_{T4} , σ_{R4}

با شدت‌های زیر ایجاد می‌شوند:

$$\sigma_{T4} = \frac{2 \times 25}{16 + 25} (1.18) = 1.44$$

$$\sigma_{R4} = \frac{16 - 25}{16 + 25} (1.18) = -0.26$$

$t = 2T$ (iii)

در زمان $t = 2T$ موج تنش انتقالی σ_{T4} به مقطع 3 می‌رسد و در نتیجه:

$$\sigma_{T3} = \frac{2 \times 16}{9 + 16} (1.44) = 1.84$$

$$\sigma_{R3} = \frac{9 - 16}{9 + 16} (1.44) = -0.403$$

در ضمن، در همین زمان $t = 2T$ موج برگشتی مقطع 4 و، σ_{R4} به مقطع 5 رسیده، و در اثر آن یک موج برگشتی به طرف رأس مخروط با شدت زیر ایجاد می‌شود:

$$\sigma_{R4,5} = \frac{36 - 25}{36 + 25} (-0.26) = 0.047$$

$t = 3T$ (iv)

در این زمان در اثر ورود موج تنش σT_3 به مقطع 2 تنشهای زیر ایجاد می‌گردد:

$$\sigma T_2 = \frac{2 \times 9}{4 + 9} (1.84) = 2.55$$

$$\sigma R_2 = \frac{4 - 9}{4 + 9} (1.84) = -0.71$$

در این زمان موج تنش $\sigma_{R4,5}$ به مقطع ۴ می‌رسد و موج انتقالی حاصل از آن با شدت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{R4,5,4} = \frac{2\times 25}{25+16}(-0.047) = -0.0574$$

به این تنش باید موج تنش انعکاسی از مقطع 4 و $\sigma_{R3,4}$ در اثر تنش σ_{R3} را اضافه کرد:

$$\sigma_{R3,4} = \frac{25-16}{25+16}(-0.403) = -0.0885$$

در نتیجه شدت تنش کلی از مقطع 4 به طرف راس مخروط برابر می‌شود با:

$$(-0.0574) + (-0.0885) = -0.146$$

$t = 4T$ (v)

در مقطع 1 تنش‌های انتقالی و برگشتی برابر می‌شوند با:

$$\sigma_{T1} = \frac{2\times 4}{1+4}(2.55) = 4.08$$

$$\sigma_{R1} = \frac{1-4}{1+4}(2.55) = -1.53$$

در این زمان در مقطع 3 وضعیت تنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{R2,3} = \frac{16-9}{16+9}(-0.71) = 0.199$$

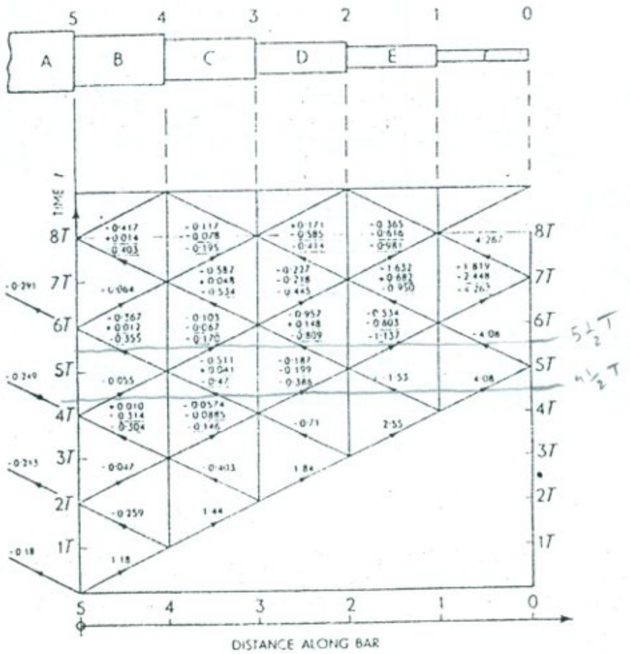
$$\sigma_{R3,4,3} = \frac{2\times 16}{9+16}(-0.1461) = -0.187$$

بنابراین شدت کلی تنش در قسمت D برابر می‌شود با:

$$(-0.199) + (-0.187) = -0386$$

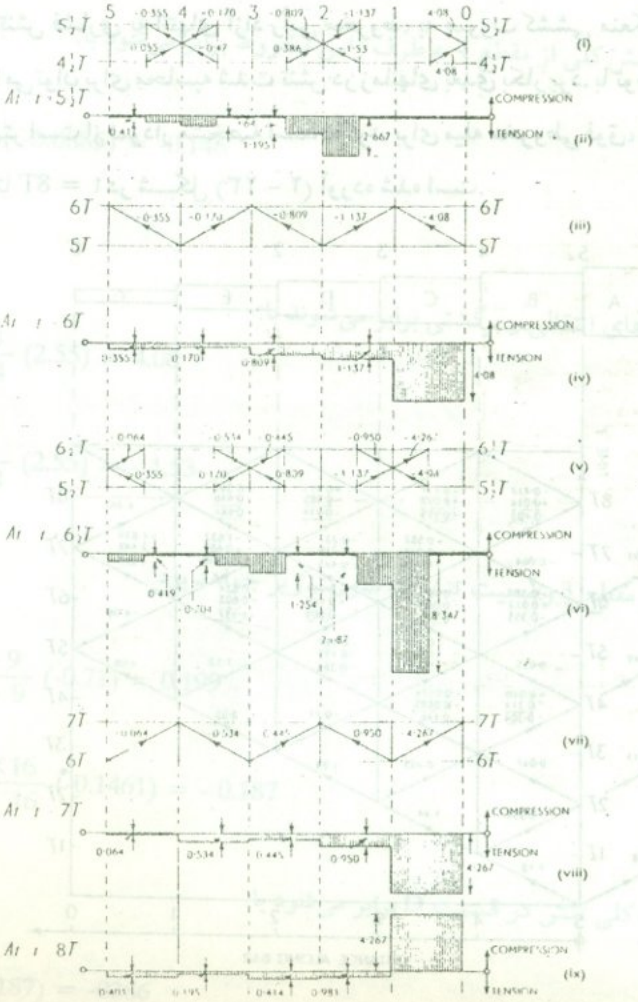
این بررسی را می‌توان تا رسیدن موج به انتهای آزاد رأس مخروط ادامه داد. با داشتن نتایج فو
توزیع شدت تنش در قسمت‌های مختلف مخروط برای $t = 3T$ به صورت شکل (۲۲b - ۲).
برای $t = 4T$ به صورت شکل (۲۲c - ۲) صورت می‌گیرد. برای $t = 5T$ که موج تنش به انتها
آزاد رسیده است، توزیع تنش در شکل (۲۲d - ۲) آورده شده است.

با توجه به نتایج بدست آمده، دیده می‌شود که ضمن حرکت موج تنش به طرف رأس مخرو
شدت آن زیاد می‌شود. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که تنش در قسمت F زیاد باشد. پس
رسیدن موج تنش فشاری به انتهای آزاد رأس مخروط، به صورت کششی منعکس می‌شود. رو
تحلیل فوق را می‌توان برای محاسبه شدت تنش در زمانهای بعدی بکار برد. با توجه به پیچیده شد
محاسبات، بهتر است از نمودار مشخصه استفاده کرد. برای میله مخروطی فوق، نمودار مشخصه
زمان $t = 0$ تا $t = 8T$ در شـکل (۲۳ - ۲) آورده شده است.



شکل (۲۳ - ۲)

با استفاده از نمودار شکل (۲۳ - ۲)، توزیع تنش را در هر زمان خاص میتوان بدست آورد. برای سهولت می‌توان قسمتهای مورد نیاز این نمودار را جدا کرد، شکل (۲۴ - ۲)، و با جمع تنش‌های هر قسمت، منتجه تنش را به دست آورد. به عنوان مثال، برای بررسی تنش در زمان $t = 5\frac{1}{2}T$، می‌توان قسمتی از نمودار شکل (۲۳ - ۲) را مطابق شکل (۲۴i - ۲) جدا کرده و سپس با جمع تنشهای حاصل تنش در هر قسمت را مطابق شکل (۲۴ii - ۲) بدست آورد. در شکل (۲۴ - ۲)، علاوه بر حالت فوق، تنش منتجه در زمانهای $6T$ ، $6\frac{1}{2}T$ ، $7T$ و $8T$ نیز آورده شده است.



شکل (۲۴ - ۲)

توزیع اندازه حرکت برای زمانهای مختلف، با فرض $T = 1$، در جدول 3-2 نشان داده شده است. به کمک این جدول می‌توان به سادگی نشان داد که در هر زمان جمع اندازه حرکت، مقدار ثابتی خواهد بود. باید توجه داشت که برای حرکت به سمت راست موج فشاری و حرکت به سمت چپ موج کششی، اندازه حرکت مثبت، و برای حالتهای عکس، اندازه حرکت منفی در نظر گرفته شده است.

جدول ۳ ـ ۲ توزیع اندازه حرکت، $(T = 1)$

Section / Time t	A	B	C	D	E	F	Momentum Total
0	1.36 36.00						36.00
T	0.18 . 36 6.48	1.18 . 25 29.50					35.98
$2T$	0.18 . 36 6.48	0.259 . 25 6.48	1.44 . 16 23.04				36.00
$3T$	0.18 . 36 +0.213 . 36 14.15	−0.047 . 25 −1.175	0.403 . 16 6.45	1.84 . 9 16.56			35.98
$4T$	0.18 . 36 +0.213 . 36 14.15	0.304 . 25 7.60	−0.146 . 16 −2.34	0.71 . 9 6.39	2.55 . 4 10.20		36.00
$5T$	0.18 . 36 +0.213 . 36 +0.249 . 36 23.12	−0.055 . 25 −1.375	0.47 . 16 7.52	−0.386 . 9 −3.47	1.53 . 4 6.12	4.08 . 1 4.08	36.01
$5\frac{1}{2}T$	23.12	−0.055 . 25 . ½ +0.355 . 25 . ½ 3.75	0.47 . 16 . ½ −0.17 . 16 . ½ 2.40	−0.386 . 9 . ½ +0.809 . 9 . ½ 1.853	1.53 . 4 . ½ −1.137 . 4 . ½ 0.786	4.08 . 1 . ½ +4.08 . 1 . ½ 4.08	36.09
$6T$	23.12	0.355 . 25 8.875	−0.170 . 16 −2.720	0.809 . 9 7.281	−1.137 . 4 −4.548	4.08 . 1 4.08	35.99
$6\frac{1}{2}T$	0.18 . 36 +0.213 . 36 +0.249 . 36 +0.291 . 36 . ½ 28.36	0.355 . 25 . ½ −0.064 . 25 . ½ 3.637	0.534 . 16 . ½ −0.170 . 16 . ½ 2.912	−0.445 . 9 . ½ +0.809 . 9 . ½ 1.638	0.950 . 4 . ½ −1.137 . 4 . ½ −0.374	4.08 . 1 . ½ −4.267 . 1 . ½ −0.093	36.08
$7T$	33.59	−0.064 . 25 −1.60	0.534 . 16 8.54	−0.445 . 9 −4.00	0.95 . 4 3.80	−4.267 . 1 −4.267	36.00
$8T$	33.59	0.403 . 25 10.075	−0.195 . 16 −3.12	0.414 . 9 3.726	0.981 . 4 −3.924	−4.267 . 1 −4.267	36.07

۲۰-۲- انتقال موجهای پیچشی در میله‌های با دو جنس مختلف، یا در میله‌ای با ناپیوستگی هندسی

دو میله استوانه‌ای با جنس‌های مختلف، و با قطرهای متفاوت در نظر گرفته، فرض می‌شود که انتهایشان با هم متصل است. کوپل پیچشی T_I بطور ناگهانی به انتهای میله 1 وارد آمده، ثابت باقی می‌ماند. با صرفنظر کردن از اثر موضعی محل اتصال دو میله، پس از رسیدن موج ورودی T_I به سطح ناپیوستگی، کوپل T_R منعکس شده، کوپل T_T منتقل می‌شود. در نتیجه:

$$T_I + T_R = T_T \tag{a}$$

این رابطه با توجه به تعادل کوپل پیچشی در دو طرف ناپیوستگی نوشته شده است. در ضمن، با توجه به پیوستگی در محل اتصال، سرعت زاویه‌ای دو میله در این محل باید برابر باشد. به عبارت دیگر:

$$\omega_I - \omega_R = \omega_T \tag{b}$$

چون T_R در خلاف جهت T_I و T_T است، ω_R در این رابطه منفی درنظر گرفته شده است. با استفاده از رابطه (c) قسمت ۸ - ۲، رابطه (b) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{T_I}{J_1\sqrt{G_1\rho_1}} - \frac{T_R}{J_1\sqrt{G_1\rho_1}} = \frac{T_T}{J_2\sqrt{G_2\rho_2}} \tag{c}$$

با حل دو رابطه (a) و (c) نتیجه می‌شود که:

$$T_T = \frac{2T_I}{1+\frac{J_1}{J_2}\cdot\frac{\sqrt{G_1\rho_1}}{\sqrt{G\rho_2}}} = \frac{2T_I}{1+\frac{J_1\rho_1 c_{T1}}{J_2\rho_2 c_{T2}}} = \frac{2T_I}{1+n} \tag{۲ - ۲۲}$$

$$T_R = -T_I\frac{1-\frac{J_1}{J_2}\cdot\frac{\sqrt{G_1\rho_1}}{\sqrt{G_2\rho_2}}}{1+\frac{J_1}{J_2}\cdot\frac{\sqrt{G_1\rho_1}}{\sqrt{G_2\rho_2}}} = -T_I\frac{1-n}{1+n} \tag{۲ - ۲۳}$$

در این دو رابطه $n = J_1\rho_1 c_{T1} / J_2\rho_2 c_{T2}$ می‌باشد.

اگر دو قسمت میله از یک جنس بوده، و قطر یک قسمت دو برابر قطر قسمت دیگر باشد، با استفاده از رابطه (۲۲ - ۲) نتیجه خواهد شد:

$$T_T = \frac{2T_I}{1+\frac{J_1}{J_2}} = \frac{2T_I}{1+\frac{2^2}{1^4}} = \frac{2}{17}T_I \tag{d}$$

یا

$$T_T = \frac{2\,T_I}{1+\frac{1^4}{2^4}} = \frac{32}{17}T_I \tag{e}$$

رابطه (d) برای حالتی است که قطر میله کم می‌شود، اما رابطه (e) برای حالتی است که قطر میله زیاد می‌گردد.