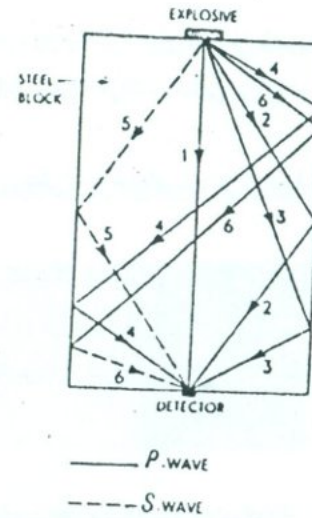


هر دو موج  $p$  ,  $s$  در اثر انفجار ایجاد شده به صورت کروی منتشر می گردند. موجهایی که به آشکار ساز نصب شده، در قاعده طرف مقابل [شکل (۱۱-۴)] وارد می شود مسیرهای مختلف با فواصل متفاوت را طی می کند. در نتیجه علایم رسیده به آشکار ساز، مؤلفه های زیادی از مسیرهای مختلف را نشان می دهد.



شکل (۱۱-۴)

اولین موج رسیده به آشکار ساز موج  $p$  از مسیر ۱ خواهد بود. پس از آن، موجهای  $p$  ,  $s$  از مسیرهای متفاوت ۲ , ۳ , ۴ به آشکار ساز می رسند. موجهای اولیه جدا و مشخص هستند، اما پس از آن به علت رفت و برگشت موجهای مختلف تشخیص آنها مشکل خواهد بود.

### بخش پنجم

### موجهای تنش الاستیک - پلاستیک در میله ها

۱- ۵- مقدمه

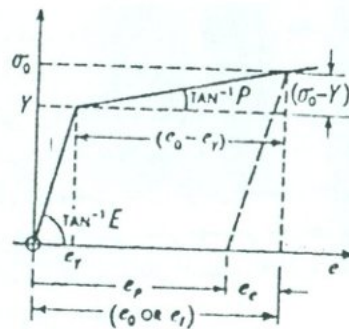
در بخش دوم، برای حالتی که تنش و کرنش در جسم کوچک است، انتشار موجهای تنش محوری، مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل ارایه شده برای تنش های کمتر از تنش تسلیم جسم بوده، اگر تنش بیشتر از تنش تسلیم باشد، موجهای تنش الاستیک - پلاستیک در جسم انتشار خواهد یافت. در این زمینه کارهای انجام شده کم است و بین نتایج محققین مختلف نااهم آهنگیهای مشاهده می شود. به هر حال، با توجه به اینکه آشنایی با این بحث و شناخت پدیده انتشار موجهای الاستیک - پلاستیک برای تحلیل بسیاری از مسایل ضروری است، در این بخش به صورت خلاصه این موضوع مرور می شود.

برای جامه عمل بخشیدن به این منظور، میله نازک و بلندی، تحت بارهای کششی و فشاری ضربه ای بررسی می گردد. در این بررسی اثر نرخ کرنش در روابط تنش - کرنش صرف نظر شده، مثل حالت انتشار موج تنش الاستیک، اثر حرکت های شعاعی و عرضی، کوچک و قابل صرف نظر کردن فرض می شود.

۲-۵- موجهای الاستیک - پلاستیک در میله بلند و یکنواخت

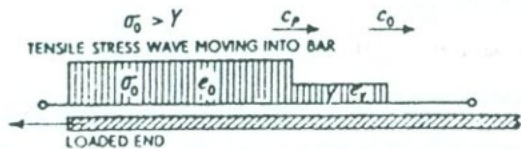
(i) منحنی تنش - کرنش در هر دو محدوده الاستیک و پلاستیک خطی است.

دانیل<sup>۱</sup> برای اولین بار انتشار موج پلاستیک در یک میله بلند را طی مقاله‌ای در سال ۱۹۳۰ ارایه داد. بدین منظور، منحنی تنش - کرنش در هر دو محدوده الاستیک و پلاستیک خطی فرض شد. میله‌ای با منحنی  $\sigma - \epsilon$  در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل (۱-۵)). شیب منحنیها در دو منطقه الاستیک و پلاستیک به ترتیب  $E$ ،  $p$  می‌باشد. مدول الاستیسیته،  $E$  مدول پلاستیسیته و  $Y$  تنش تسلیم در جسم است و در نتیجه، همواره  $E > p$  خواهد بود. اگر تنش اعمال شده ناگهانی در انتهای میله  $\sigma_0 \leq Y$  باشد، این تنش با سرعت  $\sqrt{E/\rho_0}$  در جسم منتشر خواهد شد. در حالتی که  $\sigma_0 > Y$  است، اختلاف تنش اسمی  $Y - \sigma_0$  و کرنش معادل آن،  $\epsilon_p - \epsilon_r$  که با مدول  $p$  به هم وابسته‌اند، در میله با سرعت  $\sqrt{p/\rho_0}$  انتشار می‌یابد.



شکل (۱-۵)

1 - Donnell, L.H., "Longitudinal wave transmission and impact", trans. Am. soc. mech. engrs, 52, 153, 1930



شکل (۱-۵) b

اگر ضربه در انتهای آزاد میله به گونه‌ای باشد که  $\sigma_0 > Y$  شود، می‌توان انتظار داشت که دو موج همزمان با سرعتهای  $c_p = \sqrt{p/\rho_0}$ ،  $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  در میله انتشار یابند. این دو سرعت نسبت به یک مبدا ثابت در صفحه که همان انتهای آزاد میله در زمان  $t = 0$  است، اندازه‌گیری می‌شوند. توزیع تنش و کرنش در میله در زمان  $t$  با توجه این مبدا در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. با زیاد شدن  $t$  فاصله بین پیشانی دو موج الاستیک و پلاستیک زیادتر خواهد شد. بدین ترتیب، تنش  $Y$  و کرنش مربوط به آن  $\epsilon_p Y$  با سرعت  $c_0$  منتشر شده، در حالیکه موج پلاستیک به دنبال آن با سرعت  $c_p$  حرکت می‌کند. این موج تنش را از  $Y$  به  $\sigma_0$  و کرنش را از  $\epsilon_p$  به  $\epsilon_r$  می‌رساند.

(ii) منحنی تنش - کرنش در محدوده الاستیک خطی و در محدوده پلاستیک غیر خطی است در این قسمت سرعت انتشار موج تنش محوری برای منحنی کلی تنش - کرنش که غیر خطی بوده، به گونه‌ای برآورد می‌گردد که قسمت کاو آن به طرف محور کرنش باشد، رابطه حرکت برای یک المان

$\rho_0$  چگالی اولیه جسم است و فرض می‌شود که ثابت باقی می‌ماند. با توجه به:

$$F = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dF}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

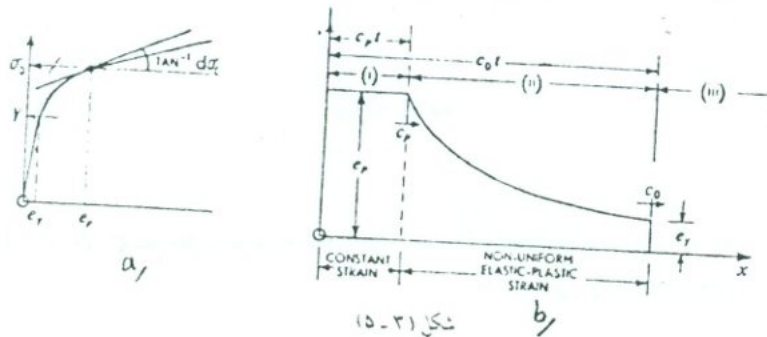
رابطه (c) به صورت زیر در می‌آید که یک معادله موج می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma_0/d\varepsilon}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5-1)$$

و سرعت انتشار موج در امتداد محور  $x$  برابر خواهد شد با:

$$c_p = \sqrt{(d\sigma_0/d\varepsilon) / \rho_0} \quad (5-2)$$

باید توجه داشت که  $d\sigma_0/d\varepsilon$  شیب منحنی تنش- کرنش در محلی که تنش  $\sigma_0$  است می‌باشد. در محدوده الاستیک،  $d\sigma_0/d\varepsilon = E$ ،  $\sigma_0 < Y$ ، از رابطه (5-2)،  $c_p = \sqrt{E/\rho_0}$  خواهد بود. شکل (5-3a). همچنین اگر در محدوده پلاستیک منحنی تنش- کرنش خطی باشد [شکل (5-1a)] سرعت انتشار تنش پلاستیک نیز برابر با  $c_p = \sqrt{p/\rho_0}$  می‌شود. برای استفاده از رابطه (5-2) باید منحنی تنش- کرنش جسم در دسترس باشد. باید توجه داشت که در این بخش هدف از منحنی تنش- کرنش، تنش مهندسی- کرنش می‌باشد. علاوه بر این، چون این منحنی برای هر شرایط خاص بارگذاری ممکن است در دسترس نباشد، با دقت کافی می‌توان از منحنی جسم تحت بار استاتیکی استفاده کرد.



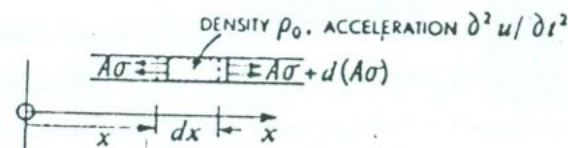
شکل (5-3)

تحت تنش با طول  $dx$  در زمان  $t = 0$  [شکل (5-2)] به صورت زیر است:

$$d(A\sigma) = \rho_0 A_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (a)$$

که در آن  $u$  تغییر مکان المان  $dx$  که در زمان  $t = 0$  با فاصله  $x$  از مبدا قرار دارد،  $\sigma$  تنش حقیقی و  $A$  سطح مقطع لحظه‌ای المان می‌باشد. به هرحال، با توجه به  $A\sigma_0 = A_0\sigma_0$  که  $A_0$  سطح مقطع اولیه میله است، رابطه (a) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d(A_0 \sigma_0) = \rho_0 A_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (b)$$



شکل (5-2)

در نتیجه:

$$\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} = \rho_0 \frac{dx}{d\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (c)$$

(iii) توزیع کرنش در میله

اگر یک میله بلند تحت باری قرار گیرد که بطور ناگهانی تنش آن به  $\sigma_0$  و کرنش آن به  $\epsilon_1$  برسد [شکل (۵-۳a)] بنابراین، همانطور که گفته شد در میله موجهای الاستیک - پلاستیک منتشر خواهد شد. با فرض خطی بودن منحنی در محدوده الاستیک، سرعت موج تنش الاستیک  $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  است، و حال آنکه در محدوده پلاستیک برابر با  $\sqrt{(d\sigma_0/d\epsilon)/\rho_0}$  خواهد بود. با توجه به منحنی شکل (۵-۳a) سرعت منطقه پلاستیک بستگی به  $\sigma_0$  داشته، که با زیادتر شدن  $\sigma_0$  این سرعت کمتر می شود.

بدین ترتیب در زمان  $t$  سه ناحیه مشخص در میله نسبت به مبدا اولیه وجود خواهد داشت. شکل (۵-۳b): ناحیه (i) بین  $x = 0$  و  $x = c_0 t$  کرنش برابر با  $\epsilon_1$  و سرعت انتشار موج  $c_p = \sqrt{(d\sigma_0/d\epsilon)/\rho_0}$  خواهد بود، که در آن  $\sigma_0$  تنش ماگزیمم در میله می باشد.

ناحیه (ii) بین  $x = c_0 t$  و  $x = c_1 t$  توزیع کرنش بین  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_Y$  متغیر خواهد بود.

ناحیه (iii) برای  $x > c_1 t$  و یا عبارت دیگر، در منطقه جلوی پیشانی تنش الاستیک، میله بدون تنش و کرنش می باشد.

دید می شود که اگر قسمت کاو منحنی  $\sigma - \epsilon$  به طرف محور کرنش باشد، قسمت کاو منحنی  $\epsilon - x$  به طرف بالا خواهد بود.

(iv) سرعت ذره در موقع رسیدن به یک سطح تنش خاص:

برای به دست آوردن سرعت حرکت ذره در قسمتی از میله که تنش آن  $\sigma_0$  و کرنش آن  $\epsilon_1$  است، المانی از میله با طول اولیه  $dx$  در نظر گرفته می شود. زمان لازم برای اینکه اختلاف نیروی  $d(A_0 \sigma_0)$  در سطح تنش  $\sigma_0$  در این المان انتشار یابد برابر خواهد شد با:

$$d_t = \frac{dx}{c_p}$$

باید توجه داشت که در این رابطه، از طول اولیه المان استفاده شده است. در نتیجه، با توجه به رابطه (۵-۲)، این زمان برابر می شود با:

$$d_t = \frac{dx}{\sqrt{(d\sigma_0/d\epsilon)/\rho_0}} \quad (d)$$

رابطه اندازه حرکت برای المان میله، به صورت زیر می باشد:

$$(\rho_0 A_0 dx) dv = d(A_0 \sigma_0) dt \quad (c)$$

که در آن  $dv$  از زیاد سرعت المان در اثر زیاد نیروی  $d(A_0 \sigma_0)$  یا  $d(A\sigma)$  خواهد بود. اکنون، با حذف  $dt$  بین روابط (d) ، (c) نتیجه زیر به دست می آید.

$$dv = \frac{d\sigma_0}{\rho_0 \sqrt{\frac{d\sigma_0/d\epsilon}{\rho_0}}} \quad (f)$$

بنابراین، سرعت کلی المان نسبت به مبدا ثابت در  $t = 0$  برای رسیدن به سطح تنش  $\sigma_0$  برابر می شود با:

$$v = \int_0^{\epsilon_1 t} \sqrt{\frac{d\sigma_0/d\epsilon}{\rho_0}} \cdot d\epsilon = \int_0^{\epsilon_1 t} c_0 \sqrt{\frac{d\sigma_0/d\epsilon}{E}} \cdot d\epsilon \quad (5-3)$$

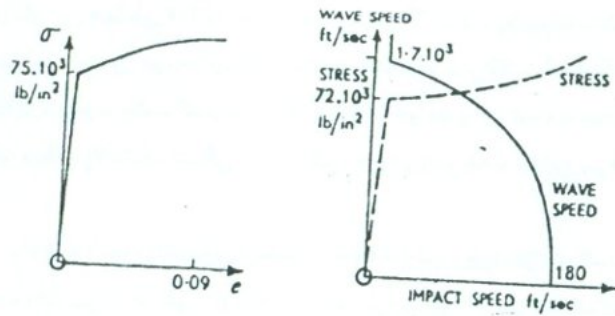
برای حالتی که در هر دو ناحیه الاستیک و پلاستیک منحنی خطی است، [شکل (۵-۱a)] سرعت برابر خواهند شد با:

$$v = \epsilon_Y \sqrt{E/\rho_0} + (\epsilon_1 - \epsilon_Y) \sqrt{\rho/\rho_0}$$

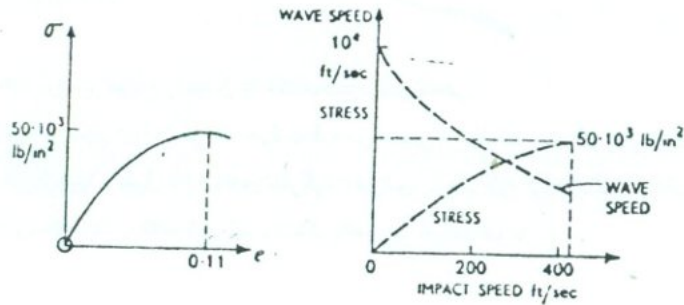
یا:

$$v = \epsilon_Y \cdot c_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_Y) c_p \quad (5-4)$$

که در آن  $\frac{Y}{E} = \epsilon_Y$  می باشد



شکل (۴-۵) (a)



شکل (۴-۵) (b)

(۷) سرعت بحرانی ضربه:

مقاومت حد استاتیکی یک میله زمانی اتفاق می افتد که  $d\sigma_0 / d\varepsilon = 0$  باشد. در حقیقت، مقاومت حد نشان دهنده پایان توانایی میله برای حمل تنش و کرنش یکنواخت است. برای تنش بالاتر از تنش حد، در جسم گلوله‌ای اتفاق افتاده در نتیجه پس از آن، جسم خواهد شکست. در بار دینامیکی نیز فرض می شود که شکست در مقاومت حد رخ می دهد. از طرف دیگر، چون در این نقطه  $(d\sigma_0 / d\varepsilon = 0)$  است، با توجه به رابطه (۲-۵) سرعت انتشار موج پلاستیک صفر می شود. سرعت انتهای تحت بار میله از رابطه (۳-۵) به دست می آید که در آن حد انتگرال از صفر تا  $\varepsilon u$  کرنش حد خواهد بود. بدین ترتیب، سرعت بحرانی یک میله  $v_c$  خواهد بود که این سرعت انتهای تحت بار میله است، به گونه ای که در اثر کشش باعث شکست میله می شود. بطور کلی، گلوله‌ای یا شکست در مقطعی از میله اتفاق می افتد. که سرعت موج پلاستیک در آن متعص صفر باشد.

در نتیجه  $v_c$  برابر خواهد شد با:

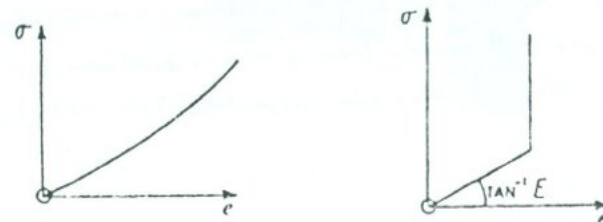
$$v_c = \int_0^{\varepsilon u} \sqrt{\frac{d\sigma_0 / d\varepsilon}{\rho_0}} d\varepsilon \quad (8)$$

شکل‌های (۴-۵a) و (۴-۵b) از مقاله‌های کارمان، دونز، وایت و گریفیت [مرجع ۲] گرفته شده است. برای منحنی تنش-کرنش شکل (۴-۵a) سرعت  $v_c$  برابر با 150 ft/sec است که عملاً هم شکست در سرعت برخورد 171 ft/sec رخ می دهد.

## (vi) موج ضربه‌ای و محیط قفل شده

در بررسی قبل منحنی  $\sigma - \epsilon$  به گونه‌ای فرض شد که قسمت کاو منحنی به طرف محور کرنش بود اما، برای برخی مواد، نظیر فولاد نیکل - کروم و مواد چند بلوری رفتار مواد با این نوع منحنی هم‌آهنگی ندارد.

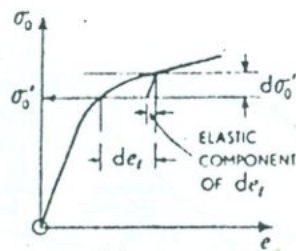
در اینگونه مواد طرف کوژ منحنی  $\sigma - \epsilon$  به سمت محور کرنش می‌باشد [شکل (۵-۵) | منحنی (۵-۵a) نمونه‌ای از منحنی تنش - کرنش برای خاکها و لاستیکها است، رفتار ایده‌آل این نوع مواد در منحنی (۵-۵b) آورده شده است. این رفتار ایده‌آل محیط قفل شده برای کرنش‌های زیاد نامیده می‌شود. با توجه به رابطه (۵-۲) در ارتباط با این منحنی، دو سرعت:  $\sqrt{E/\rho_0}$  و بی‌نهایت وجود خواهد داشت. رابطه (۵-۲) نشان می‌دهد که اگر انتهای چنین میله‌ای تحت بار قرار گیرد، در حقیقت، تنش و کرنش موج دوم بزرگتر و سریعتر از موج اول یا تنش و کرنش کوچکتر، منتشر می‌شود. بنابراین، اگر میله به اندازه کافی بزرگ باشد، موج دومی به موج اولی رسیده و یک پیشانی موج قوی، موج ضربه‌ای ایجاد خواهد کرد. به هر حال، در این مواد برعکس مواد مورد بحث قبلی، با گذشت زمان فاصله دو موج کمتر می‌شود.



شکل (۵-۵)

## (vii) موجهای تنش در میله‌ای که تحت تنش اولیه در محدوده پلاستیک قرار دارد

فرض می‌شود که میله‌ای تحت بار استاتیکی  $P$  قرار دارد، به گونه‌ای که تنش آن  $\sigma_0$  بالاتر از تنش تسلیم جسم است [شکل (۵-۶)]. حال اگر، یک بار کوچک اضافی به صورت ناگهانی به میله وارد شود با توجه به رابطه (۵-۲) انتظار می‌رود که فقط موج پلاستیک در میله منتشر شود. آزمایش نشان می‌دهد که در این حالت هر دو موج تنش الاستیک و پلاستیک انتشار خواهد یافت. موج تنش الاستیک معمولاً موج پیشرو نامیده می‌شود، و با توجه به سرعت آن که بیشتر از سرعت پلاستیک می‌باشد، این نامگذاری طبیعی به نظر می‌رسد. با توجه به شکل (۵-۶) تغییر تنش  $d\sigma'$  باعث تغییر کرنش  $d\epsilon'$  می‌گردد. تغییر کرنش  $d\epsilon'$  جمع  $d\epsilon$  الاستیک و  $d\epsilon_p$  پلاستیک خواهد بود. هر کدام از این تغییر کرنش‌ها، با سرعت‌های مربوط به خود منتشر خواهند شد.



شکل (۵-۶)

## (viii) موجهای بی‌بار کردن

در بارگذاری استاتیکی، با استفاده از نتایج تجربی همواره از این اصل استفاده می‌شود که بی‌بار شدن، الاستیک است. این اصل در بی‌بار شدن ناگهانی نیز صادق می‌باشد.

۵-۳- برخورد یک میله یکنواخت با طول محدود به یک مانع صلب

در این قسمت برخورد یک میله یکنواخت و با طول معین که منحنی تنش- کرنش آن در هر دو محدوده الاستیک و پلاستیک خطی است [شکل (۵-۱۵) - (۵-۱۶)] با یک مانع صلب بررسی می‌شود. این بررسی عمدتاً با استفاده از کار لسنسکی<sup>۱</sup> که در سال ۱۹۴۹ در USSR انتشار یافته است، به عمل می‌آید. بدین منظور، فرض می‌شود که میله‌ای به یک مانع صلب برخورد کرده در اثر برخورد تنش منتشر در میله بیشتر از تنش تسلیم جسم،  $\sigma_0 > Y$  خواهد بود. در نتیجه، با توجه به جنس میله دو موج الاستیک با سرعت  $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  و پلاستیک با سرعت  $c_p = c_1 = \sqrt{\rho/\rho_0}$  در میله انتشار خواهد یافت.

پس از برخورد میله با مانع صلب، تغییر شکل پلاستیک رخ می‌دهد، و دو موج تنش با سرعتهای  $c_0$ ،  $c_1$  از سطح برخورد بطور همزمان منتشر شده، به سمت انتهای آزاد سمت راست حرکت خواهند کرد [شکلهای (۵-۱۸a)، (۵-۱۸b)].

برای زمان  $0 < t < l/c_0$  در میله سه ناحیه مشخص وجود دارد: منطقه I که از آن هر دو موج الاستیک و پلاستیک عبور کرده است، منطقه II که فقط موج الاستیک از آن گذشته است، و منطقه III که هنوز بدون تنش می‌باشد.

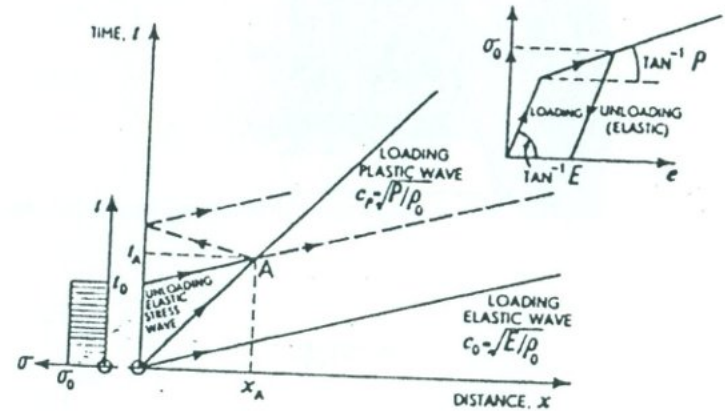
در منطقه I جسم متوقف شده، با توجه به فرض مساله و زیاد بودن سرعت اولیه کرنش در این قسمت بیشتر از کرنش تسلیم فشاری  $\epsilon_Y$  خواهد بود. حداقل سرعت برای اینکه کرنش پلاستیکی ایجاد شود برابر با  $c_1 \epsilon_Y = Y/\rho c_0$  می‌باشد. سرعت ذرات در منطقه II برابر خواهد بود:

$$v = v - c_0 \epsilon_Y \tag{a}$$

و چون این سرعت پس از عبور موج پلاستیک باید به صفر برسد، از دیاد تنش فشاری برابر می‌شود با:

$$\sigma_0 - Y = \rho_0 c_1 (v - c_0 \epsilon_Y)$$

برای بررسی این موضوع، جسمی که منحنی  $\sigma - \epsilon$  آن در هر دو محدوده الاستیک و پلاستیک خطی است، [شکل (۵-۷)] در نظر گرفته می‌شود. در این شکل نمودار مکانی انتشار موجها نیز رسم شده است. در بارگذاری اولیه در زمان  $0 < t < l/c_0$  جسم به سطح تنش  $\sigma_0$  رسیده، دو موج الاستیک و پلاستیک با سرعتهای  $c_0$  و  $c_p$  در آن منتشر خواهد شد. در زمان  $t_0$  موج الاستیک بی‌بار شدن با سرعت  $c_0$  نیز در میله منتشر شده، پس از زمان  $t_A$  و طی مسافت  $x_A$  به موج تنش پلاستیک می‌رسد. وقتی دو موج به یکدیگر می‌رسند، بسته به شدت تنش  $\sigma_0$  ممکن است موج پلاستیک متوقف شود و فقط موج الاستیک ادامه یابد. علاوه بر این، از مقطع  $x_A$  یک موج تنش الاستیک به طرف انتهای آزاد میله برگشته، مجدداً از انتها به صورت الاستیک منعکس خواهد شد. روند کامل رفت و برگشت موجها با استفاده از نمودار مکانی در قسمت (۴-۵) همین بخش مورد مطالعه قرار خواهد گرفت:



شکل (۵-۷)

در نتیجه تنش فشاری در منطقه I برابر خواهد شد با:

$$\sigma_o = Y + \rho_o c_1 (v - c_o \epsilon_Y) \quad (5-5)$$

در ضمن، کرنش کلی فشاری در این منطقه نیز برابر می باشد با:

$$\epsilon_t = \epsilon_Y + \frac{\sigma_o - Y}{p} = \epsilon_Y + \frac{v - c_o \epsilon_Y}{c_1} \quad (5-6)$$

با مراجعه به شکل (a-5) این کرنش برابر می شود با:

$$\epsilon_t = \epsilon_c + \epsilon_p$$

که در آن  $\epsilon_c$  مؤلفه کرنش الاستیک است، و در نتیجه، کرنش پلاستیک باقیمانده است که برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= (\epsilon_Y + \frac{v - c_o \epsilon_Y}{c_1}) - \frac{\sigma_o}{E} \\ &= \epsilon_Y + \frac{v - c_o \epsilon_Y}{c_1} - (\frac{Y + \rho_o c_1 (v - c_o \epsilon_Y)}{E}) \\ &= (v - c_o \epsilon_Y) (\frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{c_o^2}) \\ &= \frac{c_o^2 - c_1^2}{c_o^2 c_1} (v - c_o \epsilon_Y) \end{aligned} \quad (b)$$

در زمان  $t = L / c_o$  موج تنش الاستیک از انتهای آزاد سمت راست میله منعکس می شود، و موج پلاستیک به سمت راست در حال پیشروی خواهد بود [شکل (b-5)]. انعکاس موج الاستیک منطقه III را بی بار کرده، سرعت آنرا به  $v - 2c_o \epsilon_Y$  تقلیل خواهد داد. موج برگشتی الاستیک و موج پلاستیک پس از زمان  $T_1$  در فاصله  $x_1$  از انتهای برخورد به یکدیگر می رسند [شکل (b-5)]. در نتیجه:

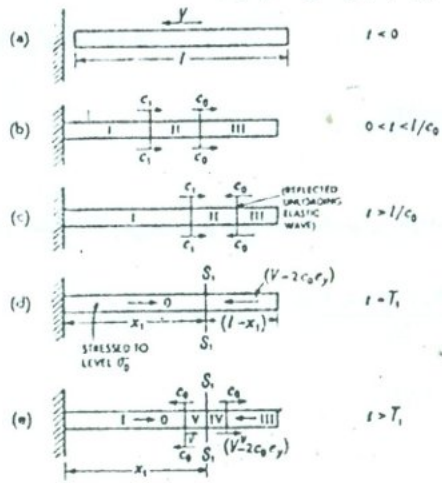
$$T_1 = \frac{x_1}{c_1} = \frac{2L - x_1}{c_o}$$

بنابراین:

$$\frac{x_1}{L} = \frac{2c_1/c_o}{1 + c_1/c_o}, \quad T_1 = \frac{2L}{c_o + c_1} \quad (5-7)$$

چون  $c_1/L_o$  برای بیشتر مواد حدود  $1/10$  است،  $x_1/L \approx 0.18$  خواهد شد. طول حقیقی منطقه پلاستیک  $(1 - \epsilon_p)x_1$  می باشد. وقتی موج بازگشتی الاستیک و موج در حال پیشروی پلاستیک پس از زمان  $T_1$  در مقطع  $S_1 S_1$  برخورد می کنند، مثل این است که میله ای با طول  $(L - x_1)$  با سرعت  $v - 2c_o \epsilon_Y$  یا  $2c_o \epsilon_Y - v$  با طول  $x_1$  که تحت تنش  $\sigma_o$  قرار دارد، ناگهان برخورد می کند. نتیجه این برخورد در زمان  $T_1$  انتشار موجهایی در دو قسمت میله خواهد بود، [شکلهای (a-5) و (b-5)]. اگر فرض شود که هر دو موج جدید الاستیک هستند، بلافاصله پس از برخورد سرعت ذرات در دو طرف  $S_1 S_1$  باید برابر گردد.

این سرعت برابر با  $v$  و به طرف راست فرض می شود. چون سرعت اولیه منطقه صفر است، و پس از عبور موج تنش جدید  $v$  (به سمت راست) می شود، با توجه به بررسی بخش دوم، این موج تنش کششی بوده، کرنش حاصل از آن نیز کششی خواهد بود. بنابراین، منطقه جدید، منطقه  $V$  دارای سرعت  $v$  به سمت راست بوده، تنش اولیه آن به اندازه  $v - 2c_o \epsilon_Y$  کم شده، به سطح  $[p(\epsilon_c + \epsilon_Y) - \epsilon_Y + E\epsilon_Y - \rho_o c_o v]$  خواهد رسید.



شکل (۵-۸)



باشد. بنابراین، در حد  $\epsilon_1 = \epsilon_Y$  است، در نتیجه، سرعت اولیه میله برای برآورده کردن این شرط

$$v = c_0 \epsilon_Y \left( 1 + \frac{2c_0}{c_0 + c_1} \right) \quad (5-8)$$

برابر می‌شود با:

کرنش فشاری باقی‌مانده در مناطق I، V پس از عبور موج الاستیک منعکس شده از  $S_1$ ،  $S_1'$ ، نتیجه تغییر کرنش فشاری  $(v - c_0 \epsilon_Y) / c_1 + \epsilon_Y$  به کرنش کششی  $\rho_0 c_0 v / E$  بوده، برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \left( \epsilon_Y + \frac{v - c_0 \epsilon_Y}{c_1} \right) \cdot \frac{\rho_0 c_0 v}{E} \\ &= \left( \epsilon_Y + \frac{v - c_0 \epsilon_Y}{c_1} \right) \cdot \frac{\rho_0 c_0}{E} \left[ \frac{(c_1 - 3c_0)(v - c_0 \epsilon_Y)}{2c_0} + v \right] \\ &= (v - c_0 \epsilon_Y) \left| \frac{-c_1^2 + c_1 c_0 + 2c_0^2}{2c_0^2 c_1} \right| \end{aligned} \quad (g)$$

با فرض اینکه از مقطع  $S_1$   $S_1'$  فقط موج تنش الاستیک انتشار یابد، این موج بطور مرتب به محل تماس میله و مانع صلب حرکت رفت و برگشت خواهد داشت. بنابراین کرنش کلی در هر مقطع تغییر خواهد کرد. به مراحل کرنشهای پلاستیک، به خصوص در منطقه I، ثابت باقی می‌ماند. از بررسی فوق می‌توان چنین برداشت کرد که اگر سرعت اولیه برخورد  $v$  در محدوده زیر باشد:

$$c_0 \epsilon_Y < v < c_0 \epsilon_Y \left( 1 + \frac{2c_0}{c_0 + c_1} \right) \quad (5-9)$$

یا:

$$1 < \frac{v}{c_0 \epsilon_Y} < 3 - \frac{2c_1 / c_0}{1 + c_1 / c_0}$$

برخورد به نتایج زیر منتهی خواهد شد:

- (i) در شروع برخورد هر دو موج الاستیک و پلاستیک در میله انتشار می‌یابند.  
 (ii) از مقطع  $S_1$   $S_1'$  با فاصله  $x_1$  از محل برخورد، موج تنش الاستیک به دو طرف میله انتشار

در همان زمان تنش، در قسمتی از منطقه III که موج به طرف راست از آن گذشته است، منطقه IV [شکل (۵-۸c)] برابر می‌شود با:

$$\rho_0 c_0 (v - 2c_0 \epsilon_Y + v)$$

عبارت داخل پراتز تغییر سرعت در این ناحیه می‌باشد. برای بدست آوردن سرعت  $v$  از تساوی نیرو در دو طرف مقطع  $S_1$   $S_1'$  استفاده می‌شود. در نتیجه:

$$p (\epsilon_1 - \epsilon_Y) + E \epsilon_Y \cdot \rho_0 c_0 v = \rho_0 v_0 (v - 2c_0 \epsilon_Y + v) \quad (c)$$

با قرار دادن  $\epsilon_1$  از رابطه (۵-۶) در رابطه (c) نتیجه خواهد شد که:

$$p \left[ \frac{v - c_0 \epsilon_Y}{c_1} + \epsilon_Y - \epsilon_Y \right] + E \epsilon_Y = 2 \rho_0 c_0 v + \rho_0 c_0 (v - 2c_0 \epsilon_Y) \quad (d)$$

سرعت  $v$  از این رابطه برابر می‌شود با:

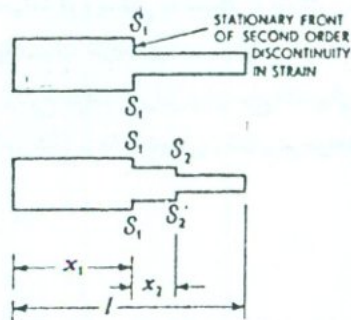
$$v = \frac{(c_1 - 3c_0)(v - c_0 \epsilon_Y)}{2c_0} + v \quad (e)$$

کرنش الاستیک  $\epsilon_1$  در منطقه IV پس از عبور موج الاستیک برابر خواهد شد با:

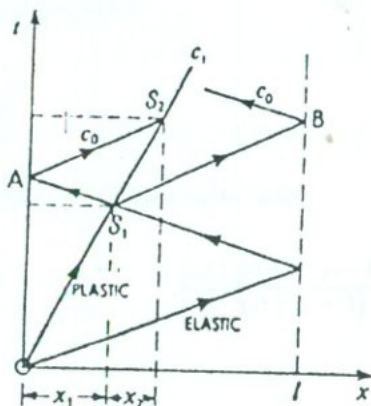
$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\rho_0 c_0}{E} \left[ \frac{(c_1 - 3c_0)(v - c_0 \epsilon_Y)}{2c_0} + 2v - 2c_0 \epsilon_Y \right] \\ &= \frac{(c_1 + c_0)(v - c_0 \epsilon_Y)}{2c_0^2} \end{aligned} \quad (f)$$

برای اینکه پس از عبور موج جدید منطقه IV هنوز بصورت الاستیک باقی بماند باید،  $\epsilon_1 \leq \epsilon_Y$  باشد. بنابراین، در حد  $\epsilon_1 = \epsilon_Y$  است، در نتیجه، سرعت اولیه میله برای برآورده کردن این شرط

صورت اغراق آمیز نشان داده شده است. انتشار موجهای الاستیک و پلاستیک، برخورد آنها و تشکیل پیشانیهای ثابت  $S_1 S_1$  و  $S_2 S_2$  در نمودار زمان - فضا مطابق شکل (۵ - ۹c) خواهد بود. این نمودار برای حالتی صادق است که هر دو پیشانی ثابت تشکیل گردد.



شکل (۹-۵، ۵-۹)



شکل (۹-۵)

(iii) مناطق سمت راست  $S_1 S_1$  همواره به صورت الاستیک باقی می ماند.

(iv) فقط در یک منطقه میله، با طول اولیه  $x_1$  تغییر شکل پلاستیک رخ می دهد.

$S_1 S_1$  پیشانی ثابت ناپیوستگی مرتبه دوم در کرنش نامیده می شود. باید توجه داشت که معمولاً در هر طرف پیشانی موج الاستیک یا پلاستیک یک ناپیوستگی مرتبه اول در کرنش وجود خواهد داشت که ثابت نمی باشد.

برای مثال: اگر میله فولادی باشد،  $c_0 \approx 2 \times 10^5$  in/sec یا  $c_0 \approx 17000$  ft/sec یا  $c_0 \approx 5 \times 10^3$  m/s،  $E_Y \approx 10^3$  یا  $E_Y \approx 13$  ton/in<sup>2</sup> یا  $E_Y \approx 0.2 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup> بوده، نامساوی (۹ - ۵) به صورت زیر در می آید:

$$1 < \frac{v}{2c_0} < 3 - \frac{2c_1/c_0}{1 + c_1/c_0} \quad (h)$$

که در آن  $v$  برحسب in/sec می باشد. با توجه به اینکه  $c_1/c_0$  تقریباً  $1/10$  است، برای حالت فوق سرعت برخورد اولیه  $v$  بین  $17$  و  $50$  ft/sec خواهد شد.

برای اینکه قسمت سمت راست مقطع  $S_1 S_1$  به حد تسلیم برسد، سرعت  $v$  باید برابر مقدار داده شده در رابطه (۸ - ۵) باشد. در این حالت مرزی کرنشها برابر خواهند شد با:

$$E_t = E_Y \left[ 1 + \frac{2(c_0/c_1)^2}{1 + c_0/c_1} \right]$$

$$E' = E_Y \left[ 2 \frac{c_0}{c_1} - 1 \right] \quad (i)$$

$$E_p = E_Y \left[ \frac{c_0}{c_1} - 1 \right]$$

اگر  $v > c_0 E_Y (1 + 2c_0/(c_0 + c_1))$  علاوه بر انتشار موج الاستیک از  $S_1 S_1$  به دو طرف میله، یک موج پلاستیک به طرف راست نیز منتشر خواهد شد. در این صورت یکی از دو موج الاستیک پس از انعکاس از دو انتهای میله با موج پلاستیک برخورد کرده، دومین پیشانی ثابت ناپیوستگی مرتبه دوم در کرنش  $S_2 S_2$  را به وجود می آورد.

در شکل (۹ - ۵)، میله با یک پیشانی ثابت: [شکل (۹-۵a)] و دو پیشانی ثابت: [شکل (۹-۵b)] به

در قسمت بالا گفته شده که برای تشکیل پیشانی دوم، یکی از دو موج الاستیک منعکس شده از دو انتها با موج پلاستیک برخورد خواهد کرد، اما اینکه کدام یک از این دو موج انعکاس زودتر به موج پلاستیک برخورد خواهد کرد بستگی به نسبت  $c_1/c_0$  دارد. در یک حالت خاص هر دو موج به طور همزمان به موج پلاستیک خواهند رسید. فرض می‌شود که این حالت خاص، پس از زمان  $T_2$  و در فاصله  $x_2$  از  $S_1$  رخ بدهد، بنابراین برای موج الاستیکی که به سمت چپ و در منطقه  $V$  انتشار می‌یابد،  $S_1$   $AS_2$  در شکل (۹-۵)، این زمان برابر خواهد شد با:

$$T_2 = \frac{x_1}{c_0} + \frac{x_1 + x_2}{c_0} \quad (i)$$

برای موج الاستیک دوم  $S_1$   $BS_2$  این زمان برابر خواهد شد با:

$$T_2 = \frac{2(L - x_1) - x_2}{c_0} \quad (k)$$

و برای موج پلاستیکی برابر می‌شود با:

$$T_2 = \frac{x_2}{c_1} \quad (L)$$

از روابط (k)، (L) و رابطه (۵-۷) نتیجه خواهد شد که

$$\frac{x_2}{L} = \frac{2c_1(c_0 - c_1)}{(c_0 + c_1)^2} = \frac{2(1 - c_1/c_0)(c_1/c_0)}{(1 + c_1/c_0)^2} \quad (۵-۱۰)$$

و:

$$\frac{x_1 + x_2}{L} = \frac{4c_0 c_1}{(c_0 + c_1)^2} = 4 \frac{\frac{c_1}{c_0}}{\left[1 + \frac{c_1}{c_0}\right]^2} \quad (۵-۱۱)$$

از طرف دیگر، با استفاده از روابط (i) و (L) و رابطه (۵-۷) شرط بین  $c_0$  و  $c_1$  برای این حالت خاص

به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{2\left(1 - \frac{c_1}{c_0}\right)\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}{\left(1 + \frac{c_1}{c_0}\right)^2}$$

از آن نتیجه خواهد شد که

$$c_0^2 - 4c_0 c_1 - c_1^2 = 0$$

از این رابطه نسبت سرعتها برابر می‌شود با:

$$c_0/c_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24 \quad (m)$$

اگر  $c_0/c_1 > 4.24$  باشد، موج الاستیک منتشر شده از  $S_1$   $S_1$  به طرف چپ، زودتر به موج پلاستیک خواهد رسید.

۳-۵ - تحلیل دینامیکی تراکم یک میله استوانه‌ای کوتاه در بین یک پرس متحرک و یک سندان ثابت با استفاده از نمودار مکانی

فرض می‌شود که میله استوانه‌ای کوتاهی از جنس الاستیک خطی، روی یک سندان صلب بدون اصطکاک قرار داشته باشد و توسط یک پرس که با سرعت ثابت  $v$  حرکت می‌کند تحت فشار قرار می‌گیرد، [شکل (۱۰a-۵)] سرعت  $v$  تا زمان  $L_0/c_1$  که در آن  $L_0$  طول میله و  $c_1 = \sqrt{E/\rho_0}$  است، ثابت می‌باشد. برای به دست آوردن توزیع کرنش و انتشار موجهای تنش الاستیک و پلاستیک از منحنی موقعیت یا زمان فضا استفاده می‌شود. در زمان  $L_0/c_0 < 1 < L_0/c_1$  که  $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  است، موقعیت مانند شکل (۱۰b-۵) بوده، در زمان  $t = \frac{L_0}{c_0}$  به صورت شکلهای (۱۰c-۵) و (۱۰d-۵) خواهد بود. سرعت قسمت بالای میله پس از عبور موج پلاستیک همان سرعت پرس متحرک  $v$  می‌باشد. در ضمن، سرعت قسمت دیگر میله که موج الاستیک از آن عبور کرده است برابر خواهد شد با:

$$Y = \rho_0 c_0 u \quad \text{یا} \quad u = \frac{Y}{\rho_0 c_0} = \frac{Y}{E} \cdot \frac{E}{\rho_0} \cdot \frac{1}{c_0}$$

در نتیجه:

$$u = c_1 \epsilon_Y$$

(۵-۱۲)

که در آن  $\epsilon_Y = \frac{Y}{E}$  می باشد.

چون ذراتی از جسم که با سندان در حال تماس هستند باید بدون حرکت باشند، موج برگشتی از سندان باید به گونه ای باشد که بتواند سرعت ایجاد شده توسط موج الاستیک  $c_0 \epsilon_Y$  را به صفر برساند. از طرف دیگر، چون پس از عبور موج الاستیک جسم به تنش تسلیم رسیده است، موج انعکاسی باید موج پلاستیک باشد. بدین ترتیب، در این حالت وضعیت جسم مطابق شکل (۵-۱۰۵) بوده، تنش در جسم پس از انعکاس موج برابر  $\sigma$  خواهد شد. در نتیجه:

$$\sigma - Y = \rho_0 c_1 \Delta v$$

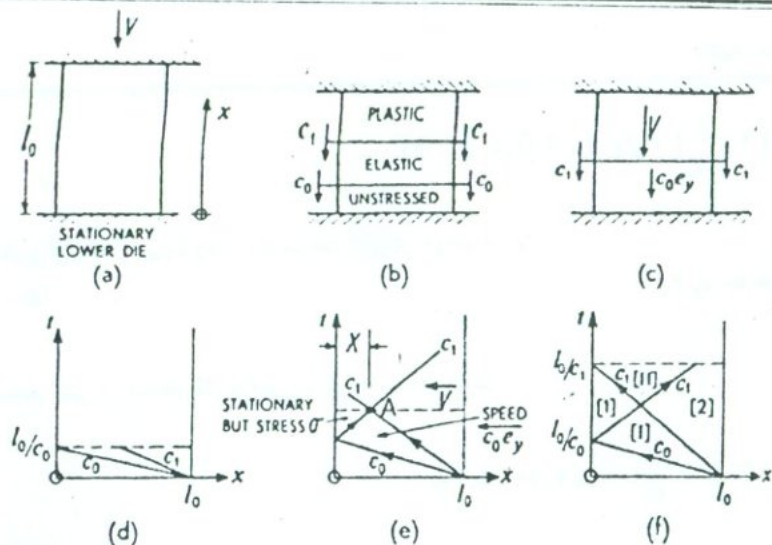
که در آن  $\Delta v$  تغییر سرعت ذرات پس از عبور موج پلاستیک می باشد، با توجه به بحث فوق  $\Delta v = c_0 \epsilon_Y$  تنش  $\sigma$  برابر خواهد شد با:

$$\sigma = Y + \rho_0 c_1 c_0 \epsilon_Y = Y \left( 1 + c_1 c_0 \frac{\rho_0}{E} \right)$$

یا:

$$\sigma = Y \left( 1 + \frac{c_1}{c_0} \right) \quad (۵-۱۳)$$

موج پلاستیک برگشتی از سندان و موج پلاستیک منتشر شده از پرس متحرک با یکدیگر در A به فاصله x از سندان برخورد می کنند. نتیجه برخورد این دو موج، فقط دو موج پلاستیک خواهد بود که به دو طرف میله منتشر خواهد شد. با توجه به اینکه جسم در حد پلاستیک است و پرس بالا با سرعت v در حال حرکت می باشد، در این شرایط موج الاستیک ایجاد نخواهد شد.



شکل (۵-۱۰)

در زمان  $t = L_0 / c_1$  نمودار وضعیت مطابق شکل (۵-۱۰۴) خواهد بود. در این حالت مقدار تنش منطقه [2] برابر می شود با:

$$Y + (v - c_0 \epsilon_Y) \rho_0 c_1 = Y \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) + \rho_0 c_1 v \quad (a)$$

اگر سرعت ذرات در منطقه [II] فرض شود، با استفاده از مناطق [I]، [III]، تنش در منطقه [III] برابر خواهد شد با:

$$Y \left( 1 + \frac{c_1}{c_0} \right) + \rho_0 c_1 w \quad (b)$$

از طرفی اگر تنش این منطقه با استفاده از مناطق [2]، [III] بدست آید، برابر می شود با:

برای مثال: اگر میله، فولادی و با مشخصات زیر فرض شود، نتایج عددی برابر خواهند شد با:

مشخصات فولاد:  $Y = 25 \times 10^3 \text{ lb/in}^2$  ( $172 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ) ,  $c_1 / c_0 = 1/10$

$c_0 = \sqrt{E/\rho_0} \approx 2 \times 10^5 \text{ in/sec}$  ( $5 \times 10^3 \text{ m/sec}$ )

سرعت حرکت پرس:  $v = 60 \text{ ft/sec}$  ( $18.3 \text{ m/sec}$ )

در نتیجه:

$\rho_0 c_1 v = \frac{E}{c_0^2} \cdot c_1 v = 10800 \text{ lb/in}^2$  ( $75 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ )

$Y (1 + \frac{c_1}{c_0}) = 25 (1 + \frac{1}{10}) \times 10^3 = 27.5 \times 10^3 \text{ lb/in}^2$  ( $190 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ )

$Y (1 - \frac{c_1}{c_0}) = 25 (1 - \frac{1}{10}) \times 10^3 = 22.5 \times 10^3 \text{ lb/in}^2$  ( $155 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ )

همچنین:

$c_0 \epsilon_Y = 2 \times 10^5 \frac{25 \times 10^3}{30 \times 10^6} = 167 \text{ in/sec} \approx 14 \text{ ft/sec}$  ( $4.3 \text{ m/sec}$ )

با ادامه محاسبات تنش در مناطق مختلف شکل (۵-۱۱) برحسب هزار  $\text{lb/in}^2$  یا  $(7 \times 10^6 \text{ N/m}^2)$

برابر خواهند شد با:

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| [1] 27.5                | [2] 22.5 + 10.8 = 33.3  |
| [3] 22.5 + 21.6 = 44.1  | [4] 27.5 + 10.8 = 38.3  |
| [5] 27.5 + 21.6 = 49.1  | [6] 22.5 + 32.4 = 54.9  |
| [7] 22.5 + 43.2 = 65.7  | [8] 27.5 + 32.4 = 59.9  |
| [9] 27.5 + 43.2 = 70.7  | [10] 22.5 + 54.0 = 76.5 |
| [11] 22.5 + 64.8 = 87.3 | [12] 27.5 + 54.0 = 81.5 |

اگر  $L_0 = 2 \text{ in}$  ( $\sim 5 \text{ cm}$ ) فرض شود،  $L_0/c_1 = 2/2 \times 10^4 = 10^{-4} \text{ sec}$  است و زمان کلی

$Y (1 - \frac{c_1}{c_0}) + \rho_0 c_1 v + \rho_0 c_1 (v - w)$  (c)

با مساوی قرار دادن روابط (b) , (c) سرعت w برابر خواهد شد با:

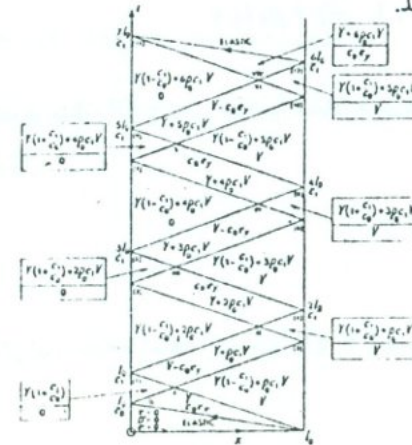
$w = v - c_0 \epsilon_Y$  (۵-۱۴)

در نتیجه، تنش در منطقه (II) به صورت زیر به دست می‌آید:

$\sigma = Y (1 + \frac{c_1}{c_0}) + \rho_0 c_1 (v - c_0 \epsilon_Y)$

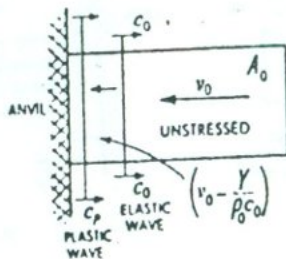
$\sigma = Y + \rho_0 c_1 v$  (۵-۱۵)

با ادامه همین روند می‌توان سرعت ذرات، تنش و کرنش هر منطقه را محاسبه کرد. نتیجه نهایی در نمودار شکل (۵-۱۱) آورده شده است. توجه داشته باشید، وقتی که پرس بالایی در  $t = 6L_0 / c_1$  ناگهان متوقف می‌شود، یک موج تنش بی‌بارکننده به شدت  $(Y + \rho_0 c_1 v)$  در استوانه منتشر خواهد شد، و وقتی این موج به سندان پائینی می‌رسد، میله از سندان با سرعت معینی به صورت جهشی جدا خواهد شد.



شکل (۵-۱۱)

می‌شود: موج تنش الاستیک با سرعت  $c_0$  و موج تنش پلاستیک با سرعت خیلی کمتر.



شکل (۱۲-۵)

با توجه به اینکه سرعت اولیه میله زیاد است، تنش الاستیک بلافاصله به  $Y$  می‌رسد و پس از عبور موج الاستیک سرعت ذرات به اندازه  $c_0$  تغییر می‌کند. در نتیجه، اگر سرعت اولیه میله  $v_0$  باشد، پس از عبور موج الاستیک سرعت برابر  $c_0$  -  $Y/\rho_0$  خواهد شد، [شکل (۱۳ a - ۵)]. موج تنش الاستیک فشاری بوده، از انتهای آزاد جسم به صورت کششی منعکس می‌گردد. بدین ترتیب پس از عبور موج بازگشتی، تنش در انتهای میله صفر و سرعت آن  $c_0$  -  $2Y/\rho_0$  خواهد شد، [شکل (۱۳ b - ۵)]. در این موقعیت، در میله سه ناحیه مشخص وجود دارد: قسمت سمت چپ میله که موج پلاستیک از آن گذشته و تغییر شکل پلاستیکی داده است، قسمت سمت راست میله که بدون تنش و کرنش می‌باشد و قسمت وسط میله که بین موج پلاستیک و موج بازگشتی الاستیک قرار داشته، تنش آن  $Y$  و کرنش آن برابر  $Y/E$  است.

تراکم برابر با  $6L_0/c_1 = 6 \times 10^{-4}$  sec خواهد بود. مقدار فشردگی در این زمان برابر با  $\epsilon = 0.432 / 2 = 0.216$  و کرنشی مهندسی برابر با  $(11 \text{ mm}) \Delta h = 6 \times 10^{-4} \times 720 = 0.432_{in}$  می‌شود. تنش در محل نزدیک به پرس بالائی برابر خواهد شد با:

$$(\sigma - Y) / \rho = \epsilon$$

$$\sigma = \rho \epsilon + Y$$

$$= 3 \times 10^5 \times 0.216 + 25 \times 10^3$$

$$= 89.8 \times 10^3 \text{ lb/in}^2 \quad (618 \times 10^6 \text{ N/m}^2)$$

در نتیجه:

۵-۵ - برخورد یک میله استوانه‌ای از جنس صلب - کامل پلاستیک با سرعت زیاد به یک مانع صلب

(۱) روش اندازه حرکت تیلور

در این قسمت برخورد عمودی یک میله استوانه‌ای با سرعت زیاد به یک مانع صلب بررسی می‌شود. پس از برخورد، تغییر شکل پلاستیک رخ داده، محل برخورد به صورت قارچی در می‌آید. برای میله‌های فولادی، منظور از سرعت زیاد، چند صد فوت یا متر بر ثانیه می‌باشد. برای جلوگیری از کمانش، میله‌ای کوتاه که طول آن کوتاهتر از سه برابر قطر آن است، در نظر گرفته می‌شود. تحلیلی که در این قسمت آورده خواهد شد، ابتدا از جانب تیلور<sup>۱</sup> ارائه گردیده است. هرچند این تئوری برای برآورد فرم تغییر شکل ناموفق است، ولی بسیاری از نتایج آن قابل قبول می‌باشد. این دست آورد برای حالتی قابل استفاده است که  $v_0^2 \approx Y/\rho_0$  باشد. در این تساوی  $\rho_0$  چگالی جسم  $v_0$  سرعت اولیه پرتاب کننده که برای فولاد نرم  $(\sim 300 \text{ m/sec})$   $v_0 \approx 1000 \text{ ft/sec}$  است؛ و  $Y$  تنش تسلیم جسم می‌باشد.

در این بحث ابتدا جسم الاستیک، کامل پلاستیک فرض شده، سپس تحلیل جسم صلب - کامل پلاستیک دنبال می‌شود. در برخورد با مانع صلب [شکل (۱۲-۵)] دو موج تنش در میله راه‌اندازی

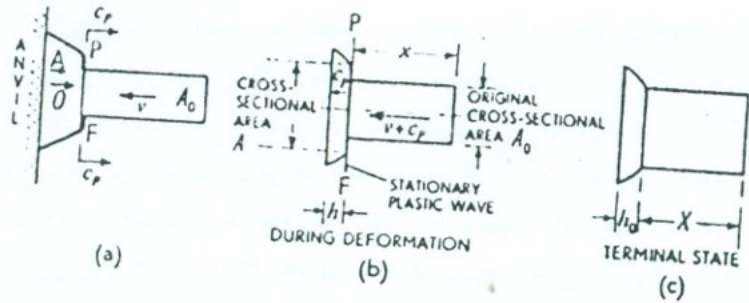
1 - Taylor, G. I. "The use of flat ended projectile for determining dynamic yield stress, I: Theoretical consideration" proc R. soc., A 194, 1948

حرکت در پیشانی موج پلاستیک، می‌توان انتظار داشت که این تغییر، قارچی شکل باشد.

(ii) روابط پایه

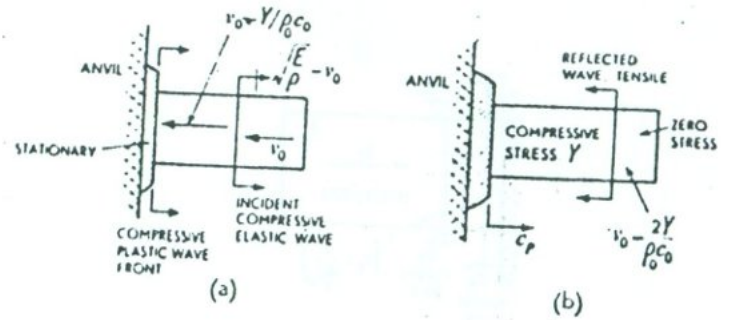
با توجه به شکل (۵-۱۴a) پیشانی موج پلاستیک PF با سرعت مطلق  $c_p$  نسبت به سطح ثابت حرکت می‌کند در نتیجه، سرعت نسبی قسمت بدون تغییر شکل (صلب) سمت راست برابر با  $v + c_p$  خواهد بود، که در آن  $v$  سرعت لحظه‌ای مطلق انتهای میله با سطح  $A_0$  می‌باشد، [شکل (۵-۱۴b)]. اگر سطح مقطع میله پس از متوقف شدن  $A$  فرض شود، رابطه ثابت باقی ماندن حجم جسم به صورت زیر در می‌آید:

$$A_0 (v + c_p) = A c_p \quad (4)$$



شکل (۵-۱۴)

با توجه به اینکه در PF فشار در همه جا ثابت و برابر با  $Y$  می‌باشد، نیروی خالص در این مقطع برابر  $Y(A - A_0)$  خواهد بود. این نیرو باید برابر نرخ تغییر اندازه حرکت در پیشانی ضربه باشد. جرم وارده بر واحد زمان برابر با  $\rho_0 A_0 (v + c_p)$  و تغییر سرعت از  $v + c_p$  به  $c_p$  رخ می‌دهد. در نتیجه:



شکل (۵-۱۳)

موج تنش کششی بازگشتی با سرعت  $\sqrt{E/\rho_0}$  حرکت کرده، به موج پلاستیک نزدیک می‌شود. موج الاستیک سرعت میله را به اندازه  $Y/\rho_0 c_0$  تغییر داده، به  $v_0 - 2Y/\rho_0 c_0$  می‌رساند. بدین ترتیب، وقتی که این دو موج به یکدیگر می‌رسند، قسمت سمت راست میله با سرعت  $v_0 - 2Y/\rho_0 c_0$  حرکت خواهد کرد. برای مثال: اگر میله فولادی باشد:

$$\rho_0 g = 0.28 \text{ lb/in}^3 \text{ (} 8000 \text{ kg/m}^3 \text{)}, Y = 30000 \text{ lb/in}^2 \text{ (} 207 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{)}$$

و  $c_0 = 2 \times 10^5 \text{ in/sec (} 5 \times 10^3 \text{ m/sec)}$  در نتیجه، دیده می‌شود که تا پایان مرحله برخورد و تبدیل کل انرژی جنبشی به کار پلاستیکی، موج الاستیک بارها در طول میله رفت و برگشت خواهد داشت. عبور مرتب موج الاستیک به انتهای میله و برگشت آن، باعث کم شدن سرعت میله شده، در نهایت میله توقف خواهد کرد. تا لحظه توقف قسمت راست میله بدون تغییر شکل پلاستیک باقی می‌ماند، با توجه به بحث فوق، اندازه حرکت آن به تدریج کمتر خواهد شد. در نتیجه، با کم شدن اندازه

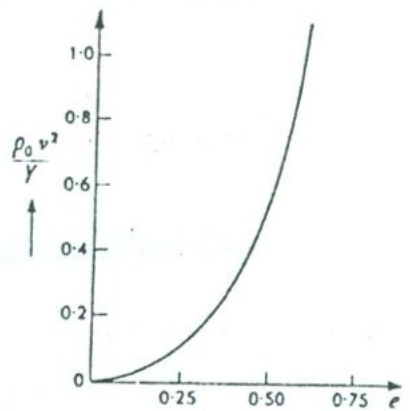


Fig 5.20

شکل (۱۵ - ۵)

(iii) طول قسمتهای تغییر شکل یافته و بدون تغییر شکل

با توجه به شکل (۱۴h - ۵) برای دو قسمت اصلی میله که شامل طول در حال از زیاد h و طول در

حال کم شدن x است، روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{dh}{dt} = c_p \quad (c)$$

و

$$\frac{dx}{dt} = - (v + c_p) \quad (d)$$

علاوه بر این، با استفاده از قانون دوم نیوتن برای قسمت تغییر شکل نیافته میله، نتیجه خواهد شد:

$$Y A_0 = - \rho_0 x \frac{d}{dt} (v + c_p)$$

$$\rho_0 A_0 (v + c_p) \cdot [ (v + c_p) - c_p ] = Y (A - A_0)$$

یا:

$$\rho_0 A_0 (v + c_p) v = Y (A - A_0) \quad (b)$$

فرض می‌شود که در این برخورد  $\rho_0$  ثابت باقی می‌ماند. اگر کرنش مهندسی المانی با طول اولیه  $dL_0$  که پس از تغییر شکل پلاستیک طول آن  $dL$  می‌شود،  $\epsilon$  در نظر گرفته شود، این کرنش برابر خواهد شد با:

$$\epsilon = \frac{dL - dL_0}{dL_0} = \frac{\frac{v}{A_0} - \frac{v}{A}}{\frac{v}{A_0}} = 1 - \frac{A_0}{A} \quad (c)$$

که در آن  $v$  حجم المان می‌باشد  
حال از رابطه (a) نتیجه می‌شود که

$$c_p = \frac{v}{\frac{A}{A_0} - 1} \quad (d)$$

با قرار دادن این سرعت در رابطه (b) نتیجه خواهد شد که:

$$\rho_0 A_0 \left[ v + \frac{v}{\frac{A}{A_0} - 1} \right] = Y \left( \frac{A}{A_0} - 1 \right) A_0$$

یا:

$$\frac{\rho_0 v^2}{Y} = \frac{\left( \frac{A}{A_0} - 1 \right)^2}{\frac{A}{A_0}} = \frac{\left( \frac{1}{1 - \epsilon} - 1 \right)^2}{\frac{1}{1 - \epsilon}} = \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon} \quad (5 - 16)$$

این رابطه در شکل (۱۵ - ۵) نشان داده شده است.



$$\left[ I_n x^2 \right]_L = \left[ - I_n (1 - \varepsilon) + \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \right] \varepsilon,$$

$$I_n \left( \frac{x}{L} \right)^2 = I_n \left( \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon_0)} \quad (5-18)$$

یا:

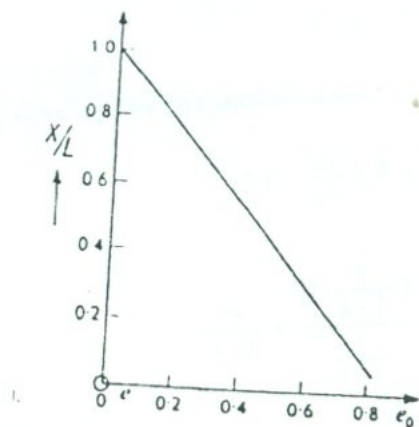
که در آن  $\varepsilon_0$  کرنش در شروع تغییر شکل پلاستیک می‌باشد.  
در ضمن: در خاتمه تغییر شکل پلاستیک  $\varepsilon = 0$  است، و اگر طول بدون تغییر شکل نهایی با  $X$  نشان داده شود، نتیجه خواهد شد:

$$I_n \left( \frac{X}{L} \right)^2 = I_n (1 - \varepsilon_0) - \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \quad (5-19a)$$

یا:

$$I_n \frac{L}{X} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} + I_n \left( \frac{1}{1 - \varepsilon_0} \right) \right] \quad (5-19 : b)$$

تغییرات  $X/L$  نسبت به  $\varepsilon_0$  در شکل (۵-۱۶) نشان داده شده است.



شکل (۵-۱۶)

$$= -\rho_0 A_0 x \frac{dv}{dt}$$

یا:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Y}{\rho_0 x} \quad (g)$$

با حذف  $dt$  بین روابط (f) و (g) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v + c_p}{Y / \rho_0 x} \quad (h)$$

از طرف دیگر با استفاده از روابط (c) و (d) و  $c_p$  برابر می‌شود با:

$$c_p = \frac{v}{\frac{\Lambda}{A_0} - 1} = \frac{v}{\frac{1}{1 - \varepsilon} - 1} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} v \quad (5-17)$$

حال، با قرار دادن این مقدار در رابطه (h) نتیجه خواهد شد که

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v \rho_0 x}{\varepsilon Y} \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{x} = \frac{\rho_0 v dv}{\varepsilon Y} \quad (i)$$

عبارت  $v dv$  را در رابطه (i) می‌توان با مشتق‌گرفتن از رابطه (۵-۱۶) حذف کرد. در نتیجه:

$$\frac{2\rho_0 v dv}{Y} = \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2} d\varepsilon \quad (j)$$

با حذف  $v dv$  بین روابط (i) و (j) نتیجه می‌شود:

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{2 - \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \cdot d\varepsilon \quad (k)$$

با انتگرال‌گرفتن از رابطه (k) و با توجه به شرط اولیه:  $\varepsilon = \varepsilon_0$  برای  $x = L$  نتیجه زیر به دست

می‌آید:

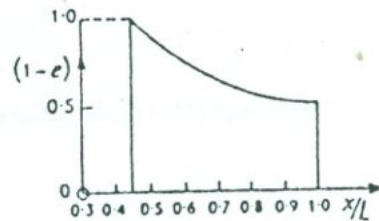
برای نشان دادن روند تغییر شکل، مقادیر  $h$  نیز باید برای برخورد فوق محاسبه گردد. بدین منظور، از روابط (c) و (f) و با استفاده از رابطه (۱۷-۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{cp}{cp + v} = 1 + \varepsilon \quad (L)$$

و از این رابطه  $h$  برابر خواهد شد با:

$$\frac{h}{L} = \int_{X/L}^1 (1 - \varepsilon) d(x/L) \quad (۵-۲۰)$$

با رسم  $X/L$  نسبت به  $(1 - \varepsilon)$  از جدول (۵-۱)، شکل (۱۷-۵) این انتگرال را می‌توان به صورت ترسیمی محاسبه کرد:



شکل (۱۷-۵)

بررسی فوق روش محاسبه مقادیر مختلف در برخورد را نشان می‌دهد. به عنوان مثال: فرض می‌شود که  $\varepsilon_0 = 0.5$  است. بنابراین، با استفاده از رابطه (۱۶-۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\rho_0 v_0^2}{Y} = \frac{\varepsilon_0^2}{1 - \varepsilon_0} = \frac{0.5^2}{1 - 0.5} = 0.5$$

در ضمن از رابطه (۱۹a-۵) نتیجه خواهد شد:

$$I_n \left(\frac{X}{L}\right)^2 = I_n (1 - 0.5) - 0.5 / (1 - 0.5) = -1.69$$

که از آن  $X/L = 0.43$  به دست می‌آید.

در زمان برخورد، طول قسمت در حال تغییر شکل  $X$  برای مقادیر مختلف  $\varepsilon$  بین 0.5 و صفر، از رابطه (۱۸-۵) قابل محاسبه می‌باشد. مقادیر بدست آمده  $X/L$  برای چند مقدار مشخص  $\varepsilon$  در جدول (۵-۱) آورده شده است.

جدول (۱-۵)

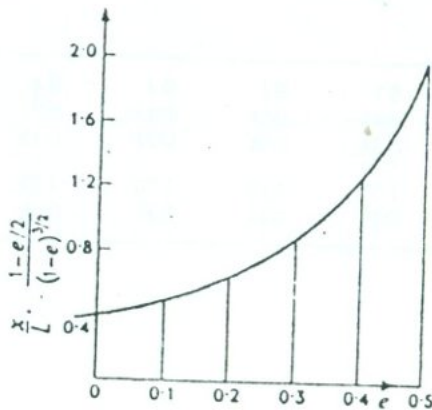
$\varepsilon$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$x/L$	0.43	0.48	0.54	0.635	0.7	1.0
$h/L$ sec	0.38	0.34	0.28	0.21	0.12	0.0
(5.50) below						
$d/d_0$	1.00	1.05	1.12	1.20	1.29	1.41
$v_0 t/L$	0.34	0.29	0.24	0.18	0.10	0.0

$$\int_0^1 dt = -L \sqrt{\frac{\rho_0}{Y}} \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \left(\frac{x}{L}\right) \frac{(1-\epsilon/2)}{(1-\epsilon)^{3/2}} \cdot d\epsilon$$

در نتیجه، با استفاده از رابطه  $\rho_0 v_0^2 Y = \epsilon_0^2 / (1 - \epsilon_0)$

$$\frac{v_0 l}{L} = \frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon_0} \int_{\epsilon}^{\epsilon_0} \left(\frac{x}{L}\right) \frac{(1-\epsilon/2)}{(1-\epsilon)^{3/2}} \cdot d\epsilon \quad (5-22)$$

تغییرات  $(x/L) (1-\epsilon/2) / (1-\epsilon)^{3/2}$  نسبت به  $\epsilon$  برای حالت خاص قبلی  $\rho_0 v_0^2 / Y = 0.5$  در شکل (۵-۱۸) رسم شده است.



شکل (۵-۱۸)

اگر ارتفاع نهائی قسمت قارچی شکل H و طول قسمت بدون تغییر شکل X فرض شوند، تغییرات H/L و X/L در مقابل  $\rho_0 v_0^2 / Y$  [مطابق شکل (۲۱-۵)] خواهد بود.

(iv) نمایه قسمت قارچی شکل:

نمایه قسمت قارچی شکل برای مقادیر مختلف  $\epsilon$  در هر مقطع x/L با استفاده از نسبت قطر مقطع پلاستیکی d به قطر اولیه  $d_0$  بدست می‌آید. این نسبت برابر است با:

$$\frac{d}{d_0} = \sqrt{\frac{A}{A_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \quad (5-21)$$

مقادیر d/d<sub>0</sub> برای چند مقدار مختلف  $\epsilon$  در جدول (۱-۵) آورده شده است.

(v) بررسی روند تغییر شکل نسبت به زمان:

زمان لازم برای اینکه پس از برخورد، موج پلاستیک به فاصله h از مانع برسد، با استفاده از رابطه (g) برابر می‌شود با:

$$\int dt = \int - \frac{\rho_0 x dv}{Y} \quad (m)$$

از طرف دیگر به کمک رابطه (۱۶-۵) نتیجه خواهد شد:

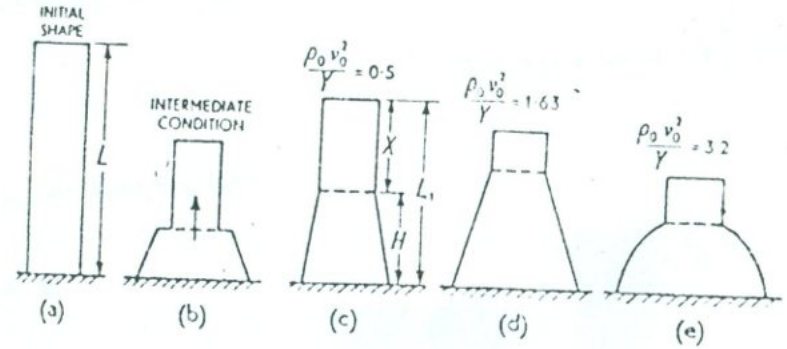
$$v^2 = \frac{Y\epsilon^2}{\rho_0 (1-\epsilon)}$$

بنابراین:

$$dv = \frac{1-\epsilon/2}{(1-\epsilon)^{3/2}} \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \cdot d\epsilon \quad (n)$$

با قرار دادن dv از رابطه (n) در رابطه (m) نتیجه می‌شود:

نمایه تغییر شکل پلاستیک با توجه به روش تیلور برای  $\rho_0 v_0^2 / Y = 0.5$  در 3.2, 1.63 و شکل (۵-۱۹) نشان داده شده است. شکلهای (c) (۵-۱۹) و d تغییر شکل نهائی و شکل (۵-۱۹b) تغییر شکل لحظه‌ای را نشان می‌دهند.



شکل (۵-۱۹)

(vi) یک روش ساده برای محاسبه H شکلهای (c) (۵-۱۹) و d نشان می‌دهند که برای  $\rho_0 v_0^2 / Y = 0.5$  ، 1.63 نمایه قسمت پلاستیکی تقریباً مخروطی شکل است. با استفاده از این دست آورد می‌توان H/L را با روش ساده‌تری محاسبه کرد. حجم قسمت تغییر شکل یافته، [شکل (۵-۲۰)] برابر می‌شود با:

$$(L - X) A_0 = 1/3 (A_1 H_1 - A_0 H_0)$$

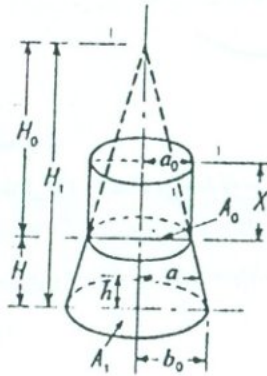
در نتیجه:

$$1 - \frac{X}{L} = \frac{1}{3} \left( \frac{l}{1 - \epsilon_0} \cdot \frac{d_1}{d_1 - d_0} - \frac{d_0}{d_1 - d_0} \right) \frac{H}{L}$$

بنابراین، H/L برابر خواهد شد با:

$$\frac{H}{L} = \frac{3(1 - X/L)(1 - \epsilon_0)(1 - \sqrt{1 - \epsilon_0})}{1 - (1 - \epsilon_0)^{3/2}} \quad (5-23)$$

که در آن X/L از رابطه (۵-۱۹) بدست می‌آید. تغییرات H/L نسبت به  $\epsilon_0$  یا  $\rho_0 v_0^2 / Y$  با توجه به رابطه (۵-۲۳) در شکل (۵-۲۱) نشان داده شده است. وقتی  $\rho_0 v_0^2 / Y = 1$  است، با توجه به این دست آورد، H/L ماگزیم مقدار خود 0.43 را دارد. نتایج تقریبی فوق با نتایج تیلور بسیار نزدیک است.



شکل (۵-۲۰)