

$$\sigma = \frac{Y + \rho_0 c_p v_0}{\left(1 + \frac{m}{M} \frac{c_p t}{L}\right)} \quad (5-33)$$

به شرطی که $\sigma > Y$ باشد. رابطه (۵-۳۳) تا زمانی صادق است که σ کم شده با Y برابر گردد. این حالت موقعی اتفاق می افتد که موج پلاستیک به اندازه طول x در میله پیشروی کند. به عبارت دیگر،

$$c_p t = x = M c_p v_0 / A_0 Y$$

واضح است که ماگزیمم مقدار x طول میله L_0 خواهد بود. اگر تغییر شکل پلاستیک ضمن عبور اول موج پلاستیک در میله متوقف نشود، موج تنش پلاستیک از تکیه گاه صلب به صورت فشاری منعکس خواهد شد. پس از انعکاس این موج، تنش دو برابر شده، قسمتی از میله که این موج از آن می گذرد، متوقف خواهد شد.

بخش ششم

تحلیل پلاستیکی سازه های تحت بار ضربه ای

۱-۶- مقدمه

در این بخش، ابتدا تحلیل پلاستیکی برخی سازه های مکانیکی نظیر: تیر، قاب، حلقه، ورق و پوسته مرور می گردد. در این تحلیل عمدتاً بارگذاری شبه استاتیکی در نظر گرفته می شود. به عبارت دیگر، از روش استاتیکی برای مسائل دینامیکی استفاده می گردد. پس از آن رفتار تیرها و حلقه ها تحت بار ضربه ای بررسی شده ایده لولای متحرک مورد مطالعه قرار می گیرد.

۲-۶- تئوری مقدماتی خمش پلاستیکی

یک تیر مستقیم با مقطع چهارگوش $b \times h$ | شکل (۱-۶) | وقتی در محدوده الاستیک تحت ممان خالص M قرار می گیرد، به صورت قوسی از دایره به شعاع R خمیده می شود، | شکل (۱-۶) |. باید توجه داشت که همزمان، در جهت عرضی نیز، انحناء تیر v/R | شکل (۱-۶) | خواهد بود. با فرض اینکه جنس تیر الاستیک - کامل پلاستیک است، برای $M \leq M_E$ توزیع تنش به صورت خطی بوده، از رابطه $\sigma = My/I$ برای محاسبه استفاده می شود. وقتی $M =$

اگر $h > b$ باشد، تیر به صورت ورق در آمده، در کنارها خمش ورق به صورت تنش صفحه‌ای در می‌آید. به عبارت دیگر، در این قسمت‌ها تنش در جهت ضخامت صفر است. در قسمت‌های وسط ورق حالت خمش به صورت کرنش صفحه‌ای خواهد بود. بدین ترتیب، در قسمت‌های وسط، انحنای عرضی رخ می‌دهد و با توجه به اینکه کرنش در جهت ضخامت صفر است، یک ممان خمشی عرضی به ورق وارد می‌شود. برای ورق با عرض زیاد، منطقه کرنش خمشی گسترش یافته، جسم از معیار تسلیم ترسکاتبعیت می‌کند. بنابراین تنش نرمال را در مقطعی که به حد تسلیم رسیده است میتوان Y در نظر گرفت. در حالیکه با معیار فون میسر این تنش برابر با $2Y\sqrt{3}/3$ خواهد بود. در حالت دوم $M_p = (bh^2 Y/4)(2\sqrt{3}/3)$ می‌شود.

اگر تیر دارای انحنای اولیه باشد، با فرض این که ضمن بارگذاری، این انحنای تغییر نکند، M_p برابر ممان کامل پلاستیک تیر مستقیم در نظر گرفته می‌شود.

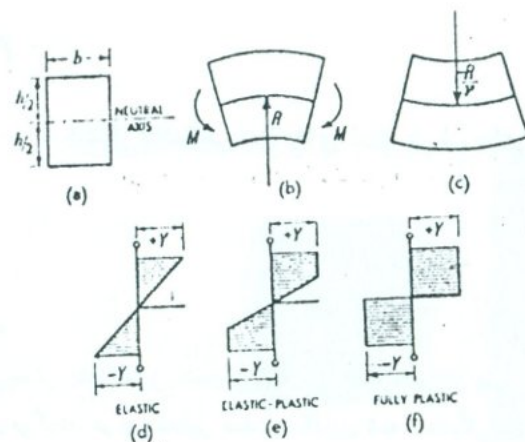
در پاره‌ای تحلیل‌ها جنس تیر صلب - کامل پلاستیک در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، قبل از این که مقطع تیر در محلی به حالت کامل پلاستیک برسد، خیز تیر صفر خواهد بود. وقتی مقطعی از تیر به حالت کامل پلاستیک رسید، در این محل لولای پلاستیکی رخ می‌دهد، بقیه قسمت‌های تیر نیز بسته به شکل کلی تکیه‌گاه‌ها حول این لولا چرخش صلب خواهند داشت. در چنین حالتی در تیر "فروریزش" اتفاق افتاده، بار وارد به تیر بار حد یا بار فرو ریزش نامیده می‌شود.

اگر باری که باعث فروریزش شده است برداشته شود، تیر یا سازه مقدار کمی بازگشت الاستیکی خواهد داشت. در اثر این عمل در تیر تنش پس ماند به صورت دائمی می‌ماند که در بارگذرایهای بعدی این تنش باید مورد توجه قرار گیرد.

توزیع تنش در یک مقطع مستطیل شکل برای حالتی که بطور همزمان تحت ممان خمشی M و بار محوری F قرار دارد، پس از رسیدن به حالت کامل پلاستیک مطابق شکل (۲ - ۶) خواهد بود. طبیعی است که وجود نیروی F تقارن توزیع تنش را به هم می‌زند و اگر $F_p = bhY$ باشد، به سهولت می‌توان نشان داد که رابطه زیر برقرار خواهد شد:

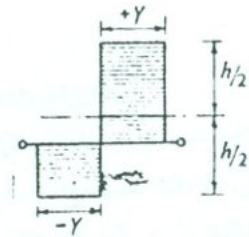
$$\left(\frac{M}{M_p}\right) + \left(\frac{F}{F_p}\right)^2 = 1 \quad (a)$$

M_p می‌گردد، تنش در دورترین لایه‌ها به حد تسلیم رسیده، برابر Y می‌شود، [شکل (۱-۶d)] در این حالت مقدار ممان خمشی برابر با $M_p = bh^2 Y/6$ خواهد شد. برای $M_E < M \leq M_p = bh^2 Y/4$ توزیع تنش در مقطع مطابق شکل (۱-۶) است، و به عبارت دیگر، قسمت میانی مقطع الاستیک و قسمت‌های بیرونی آن پلاستیک می‌شود. در حد وقتی $M = M_p$ می‌شود، همه مقطع پلاستیک خواهد شد، [شکل (۱-۶)]. در این بررسی M_E ممان خمشی حد الاستیک و M_p ممان خمشی کامل پلاستیک مقطع نامیده می‌شوند.



شکل (۱-۱)

نسبت M_p/M_E "ضریب شکلی مقطع" نامیده شده که این ضریب برای مقطع مستطیل برابر با 1.5 می‌باشد. برای مقطع دایره‌ای، ضریب شکلی مقطع برابر با $16/3\pi$ و برای مقطع مثلث متساوی الاضلاع برابر با $4(2 - \sqrt{2})$ خواهد شد. ضریب مربوط به مثلث متساوی الاضلاع در صورتی برابر با مقدار فوق است که دو ساق آن نسبت به محور خنثی دارای شیب برابر باشند. اگر ارتفاع مثلث h باشد، در حالت الاستیک محور خنثی با فاصله $h/3$ از قاعده قرار داشته، که برای حالت کامل پلاستیک این فاصله $h/\sqrt{2}$ خواهد شد.



شکل (۶-۲)

۶-۳- لولاهای پلاستیکی در تیرها

یک تیر کنسول از جنس صلب-کامل پلاستیک با مقطع چهارگوش و طول L مطابق شکل (۶-۳) فرض می‌شود. در انتهای آزاد تیر، بار P وارد می‌آید. ممان خمشی در محل تکیه‌گاه ثابت ماکزیمم است و با ازدیاد P ممان خمشی در این محل می‌تواند ابتدا به M_E و نهایتاً به M_P برسد. وقتی ممان خمشی برابر با M_P می‌شود، تنش در همه مقطع به تنش تسلیم رسیده، با توجه به جنس تیر، مقطع مورد نظر به صورت کاملاً پلاستیک در می‌آید. در این حالت مقطع مجاور تکیه‌گاه، به صورت لولای پلاستیکی عمل می‌کند، در نتیجه بقیه تیر می‌تواند حول این مقطع چرخش صلب داشته باشد. بنابراین گفته می‌شود که در تیر فروریزش اتفاق افتاده، بار P در این موقعیت بار حد یا بار فرو ریزش نامیده است.

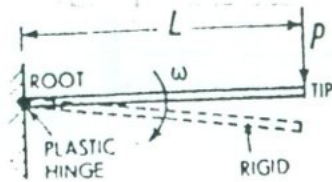
در موقع فروریزش نیروی P با سرعت (ω) که در آن (ω) سرعت زاویه‌ای تیر حول لولای پلاستیکی می‌باشد، به طرف پایین حرکت می‌کند و نرخ کار انجام شده توسط P ، $PL\omega$ خواهد شد. همه این کار صرف کار پلاستیکی $M_P\omega$ خواهد شد. در نتیجه:

$$PL\omega = M_P\omega$$

یا:

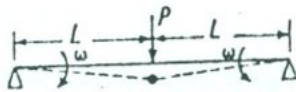
$$P = \frac{M_P}{L}$$

(a)

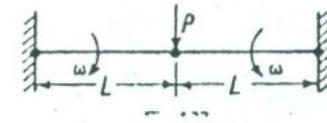


شکل (۶-۳)

برای تیری که روی تکیه‌گاه ساده وجود دارد، [شکل (۶-۴)]، $P = 2M_P/L$ و برای تیری با دو سرگیردار، شکل (۶-۵)، $P = 4M_P/L$ خواهد شد.



شکل (۶-۴)



شکل (۶-۵)

اگر جرم M با سرعت u_0 در انتهای آزاد تیر کنسول به جرم m برخورد کند، با صرف نظر کردن از اثر اینرسی تیر، به صورت ساده و تقریبی می توان تغییر شکل انتهای آنرا به دست آورد. در این صورت انرژی جنبشی جرم M برابر کار پلاستیکی ممان M_p در لولای پلاستیکی خواهد شد. در نتیجه:

$$1/2 M u_0^2 = M_p \frac{\Delta}{L}$$

یا:

$$\Delta = \frac{M u_0^2 L}{2 M_p} \quad (6-1)$$

تحلیل دقیقتر این حالت با در نظر گرفتن اینرسی تیر در انتهای این بخش بررسی خواهد شد. به هر حال باید توجه داشت که روش تقریبی فوق برای $M \gg m$ قابل قبول است.

اگر تیر کنسول به صورت یک میله صلب حول تکیه گاه گیردار بچرخد، سرعت انتهای آزاد، آن u_0 و انرژی جنبشی آن $1/2 I \omega^2$ خواهد بود. امان اینرسی حول تکیه گاه برابر با $bL^3 h\rho/3$ بوده و $\omega = u_0/L$ می باشد. در این صورت، خیز انتهای تیر برابر خواهد شد با:

$$1/2 I \omega^2 = M_p \frac{\Delta}{L}$$

یا:

$$\Delta = bL^2 h\rho u_0^2 / 6M_p \quad (6-2)$$

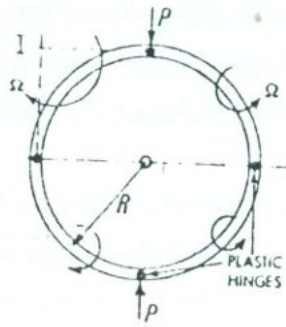
۴-۶- لولاهای پلاستیکی در حلقه های دایره ای

یک حلقه گرد که خیلی هم نازک و انعطاف پذیر نیست مطابق شکل (۶-۶) تحت دو بار فشاری P در امتداد قطر حلقه قرار دارد و شعاع متوسط حلقه R می باشد، در این حالت فروریزش در حلقه موقمی رخ می دهد که چهار لولای پلاستیکی در آن تشکیل شده، اجازه بدهد قسمتهای چهارگانه حلقه به صورت مکانیزم در آید. بدین ترتیب، با ثابت باقی ماندن مرکز حلقه O چهار قسمت حلقه با سرعت زاویه ای Ω حول مرکز آنی دوران A می چرخند و بارهای P با سرعت $R\Omega$ به هم نزدیک می شوند. کار انجام شده توسط نیروهای P برابر با $2PR\Omega$ و کار پلاستیکی لولاها برابر $8M_p \Omega$ خواهد بود. در نتیجه:

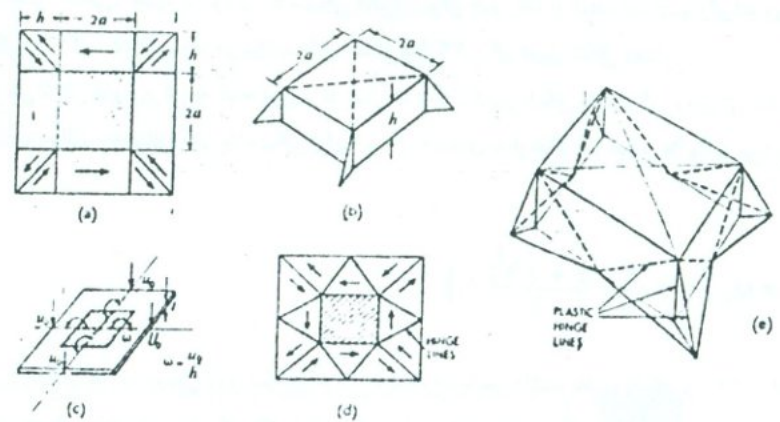
$$2PR\Omega = 8 M_p \Omega$$

یا:

$$P = 4M_p/R \quad (6-3)$$



شکل (۶-۶)



شکل (۶-۲۲)

۱۱-۶- تیر تحت بار ضربه‌ای، لولای متحرک

در این قسمت تحلیل تیر از جنس صلب - کامل پلاستیک تحت بارگذاری سریع، با استفاده از پنداره لولای پلاستیکی متحرک ارائه می‌گردد. در این حالت تیر تحت بار ضربه‌ای بزرگ و ناگهانی قرار گرفته، اینرسی آن، نقش اصلی را در تغییر شکل تیر به عهده می‌گیرد. بطور کلی، لولای پلاستیکی در مقطعی از تیر رخ می‌دهد که ممان خمشی برابر ممان خمشی کامل پلاستیک آن مقطع گردیده است و نیروی برشی صفر می‌باشد. معمولاً یک تغییر ناگهانی در محل لولا رخ می‌دهد که در اثر تغییر سرعت زاویه‌ای المانهای تیر محل لولا تغییر میکنند. به عبارت دیگر، لولا حرکت می‌کند در هر حالت خاص بارگذاری دینامیکی، ممکن است تشکیل لولای پلاستیکی و حرکت آن به گونه‌های متفاوت امکان‌پذیر باشد. به هر حال، برای هر شکل ممکن، کار پلاستیکی انجام شده در لولا و یا لولاهای متحرک، باید برابر انرژی جنبشی اولیه داده شده به تیر

باشد.

برای برآورد میزان دقت تحلیل ارائه شده در این نوع بارگذاری، توجه به فرضیات زیر ضروری به نظر می‌رسد:

* (a) تقریباً همه تحلیل‌ها محدود به تنش خمشی بوده، از اثر تنش برشی و تنش محوری صرف‌نظر می‌گردد.

* (b) جنس تیر صلب - کامل پلاستیک فرض شده اثر کرنش‌های الاستیک حذف می‌شود.

* (c) اثرهای موضعی، و به عبارت دیگر از تغییر شکلهای اولیه در منطقه لولای پلاستیکی صرف‌نظر می‌گردد.

* (d) تمام تحلیل‌ها با فرض اینکه شکل اولیه تیر ضمن ضربه ثابت است انجام می‌شود.

* (e) اثر نرخ کرنش و اثر کرنش سختی در محاسبات وارد نمی‌شود.

* (f) کارهای تجربی و آزمایشگاهی در این زمینه کم است، و در مواردی هم که نتایج تجربی در دسترس می‌باشد، تطابق کاملی بین نتایج تجربی و نتایج تئوری وجود ندارد.

(a) ضربه مرکزی در تیرها با دو انتها آزاد و با طول معین

تیر دو سر آزاد AB با طول $2l$ تحت بار ناگهانی P در وسط تیر قرار می‌گیرد. [شکل (۶-۲۳)] در این قسمت رفتار تیر با توجه به مقدار نیروی P بررسی می‌شود. با فرض اینکه تیر صلب - کامل پلاستیک است، پس از اعمال بار P تیر در امتداد بار دارای شتاب a خواهد شد. اگر جرم واحد طول تیر m باشد، رابطه حرکت تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$p = 2 ml \cdot a$$

در نتیجه:

$$f_0 = \frac{P}{(g) 2mL}$$

(a)

در این حالت با توجه به اینکه نیروی P در مرکز تیر وارد می‌آید، تیر چرخشی نداشته، کوپل خارجی به تیر وارد نمی‌شود.

$$M = \int_{\lambda}^L m f_0 (L - x) dx = m f_0 \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right]_{\lambda}^L$$

$$= \frac{m f_0 (L - \lambda)^2}{2} \quad (c)$$

ممان خمشی در مرکز تیر c جایی که $\lambda = 0$ است، ماگزیم مقدار خود $M_c = m f_0 L^2/2$ را دارا می‌باشد. وقتی $M_c = M_p$ شود، در وسط تیر ممان خمشی کامل پلاستیک رخ می‌دهد. در نتیجه:

$$M_p = m f_0 L^2/2 = m \cdot \frac{P}{2mL} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{PL}{4}$$

$$P = \frac{4M_p}{L}$$

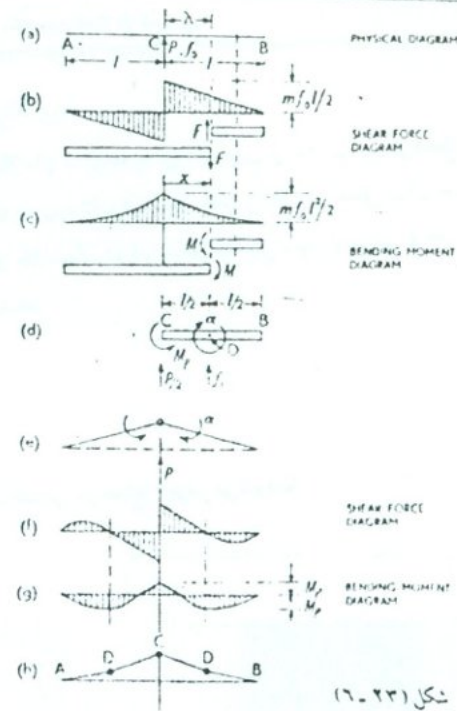
یا:
(۶-۳۲)

بنابراین، وقتی $P = 4M_p/L$ باشد، یک لولای پلاستیکی در مرکز تیر ایجاد می‌شود. تحلیل فوق برای بار در محدوده $0 < p < 4M_p/L$ صادق است. اگر بار $P > 4M_p/L$ باشد، همه تیر با شتاب حرکت کرده و با توجه به تشکیل لولای پلاستیکی در وسط تیر، هر نیمه حول c چرخش صلب خواهد داشت. با این بیان نیمه راست تیر مطابق شکل (۶-۳۳ d) تحت بار عرضی $P/2$ و ممان خمشی M_p قرار می‌گیرد. بطوری که، در شکل نشان داده شده است، این نیمه دارای شتاب خطی f_1 و شتاب زاویه‌ای α حول D خواهد بود. بنابراین:

$$P/2 \cdot L/2 - M_p = I\alpha \quad (d)$$

که در آن I ممان اینرسی CB حول D بوده و برابر با $mL^3/12$ می‌باشد. در نتیجه، رابطه (a) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{PL}{4} - M_p = \frac{mL^3}{12} \alpha \quad (e)$$



شکل (۶-۳۳)

هر المان تیر دارای اینرسی می‌باشد، و با توجه به اینکه تیر دارای شتاب f_0 است، یک نیروی گسترده به شدت $m f_0$ بر واحد طول برخلاف جهت حرکت به تیر وارد می‌شود. بدین ترتیب، در هر مقطع تیر، یک نیروی برشی F اثر می‌کند، [شکل (۶-۳۳ b)] مقدار نیروی برشی F در مقطع λ از مرکز تیر برابر می‌شود با:

$$F = \int_{\lambda}^L m f_0 dx = m f_0 (L - \lambda) \quad (b)$$

ممان خمشی در هر مقطع تیر [شکل (۶-۳۳ c)] نیز برابر خواهد شد با:

(۶ - ۲۳ g) خواهد بود.

در حالت $PL/M_p > 4$ با توجه به بررسی فوق، نیروی برشی در مقطع به فاصله λ رابطه (h) صفر می‌شود. با توجه به پیوسته بودن ممان خمشی، در این محل ممان خمشی ماکزیمم بوده، و انتظار می‌رود که لولای پلاستیکی در این محل تشکیل شود. با فرض $\lambda/L = z$ ، رابطه (h) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{M_p}{PL} = \frac{3z - 1}{12z} \quad (i)$$

از طرفی ممان خمشی در مقطع λ برابر می‌شود با:

$$M = \int_{\lambda}^L mf(L-x) dx$$

$$= \int_{\lambda}^L (L-x) \left[\frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} \frac{L}{2} + \frac{P}{2mL} - \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} \cdot x \right] dx \quad (j)$$

از رابطه (h) $PL^2/\lambda = 3(PL - 4M_p)$ ، با قرار دادن این مقدار در رابطه (j) نتیجه خواهد شد:

$$M = \int_{\lambda}^L (L-x) \left[\frac{P}{2\lambda} + \frac{P}{2L} - \frac{P}{L\lambda} \cdot x \right] dx$$

یا:

$$\frac{2M}{P} L\lambda = \int_{\lambda}^L (L-x)(-2x + L + \lambda) dx = \frac{(L-\lambda)^3}{6} \quad (k)$$

شتاب مقطعی از این نیمه تیر به فاصله x از c برابر می‌شود با:

$$f = f_1 - (x - L/2) \alpha = \frac{P}{2mL} - \frac{(PL/4 - M_p)}{mL^3/12} (x - L/2) \quad (f)$$

توزیع نیروی برشی در تیر با استفاده از رابطه (f) برابر خواهد شد با:

$$F = \int_{\lambda}^L mf dx$$

$$= \int_{\lambda}^L m \left[\frac{P}{2mL} - \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} (x - L/2) \right] dx$$

$$= m \left[\left(\frac{P}{2mL} + \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} \frac{L}{2} \right) (L - \lambda) - \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} \frac{(L^2 - \lambda^2)}{2} \right] \quad (g)$$

از این رابطه وقتی نیروی F برابر صفر می‌شود که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{L + \lambda}{2} \cdot \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} = \frac{P}{2mL} + \frac{3(PL - 4M_p)}{mL^3} L/2$$

در نتیجه، λ فاصله مقطعی با نیروی برشی صفر است که برابر می‌شود با:

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{PL/M_p}{3 \left(\frac{PL}{M_p} - 4 \right)} \quad (h)$$

نمودار نیروی برشی برای دو حالت مورد بحث، در شکل‌های (۶ - ۲۳ b) و (۶ - ۲۳ f) رسم شده‌اند. در ضمن نمودار ممان خمشی نیز برای این دو حالت مطابق شکل‌های (۶ - ۲۳ c) و

مقدار حد M در رابطه (k) می‌باشد. در نتیجه:

$$(L - \lambda)^3 = 12 \frac{M_p}{PL} L^2 \lambda$$

با استفاده از رابطه (i) این رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$(1 - z)^3 = 12 \frac{M_p}{PL} z = (3z - 1)$$

این عبارت پس از بسط به صورت معادله درجه سوم زیر در خواهد آمد:

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 2 = 0 \quad (L)$$

که فقط دارای یک ریشه حقیقی $z = 0.404$ می‌باشد. بنابراین، دو لولای پلاستیکی دیگر در فواصل L از دو انتها تشکیل می‌گردد. با قرار دادن مقدار z در رابطه (i) نتیجه خواهد شد:

$$\frac{PL}{M_p} = 22.8 \quad \text{یا} \quad P = \frac{22.8 M_p}{L} \quad (۶-۳۳)$$

توزیع نیروی برشی و ممان خمشی برای این مقدار بار مطابق شکل‌های (f) و (g) (۶-۲۳) است. حالت تیر برای $PL/M_p > 22.8$ مطابق شکل (h) (۶-۲۳) خواهد بود. در این صورت، تیر دارای چهار بازوی صلب و سه لولای پلاستیک می‌باشد. اگر بار بیشتر از $22.8 M_p L$ باشد، دو لولای پلاستیکی تشکیل شده در $0.404 L$ به طرف مرکز تیر جابه جا می‌شود، بنابراین با روشی مشابه روش فوق قسمتهای مختلف تیر باید مورد تحلیل قرار گیرند.

با کم شدن PL/M_p از مقدار ماگزیمم خود (که بیشتر از $۲۲/۸$ است) به صفر، نظام لولاهای پلاستیکی تغییر می‌کند، در نتیجه هر چهار قسمت تیر دارای سرعت زاویه‌ای مساوی می‌شوند. ابتدا دو لولای کناری حذف شده و خمش دو نیمه تیر حول لولای مرکزی ادامه می‌یابد. به تدریج سرعت زاویه‌ای به سطحی تقلیل می‌یابد، خمش مرکز نیز متوقف می‌شود. پس از آن حرکت جابه

جائی یکنواخت به صورت یک جسم صلب ادامه خواهد یافت.

(ii) محل لولای پلاستیکی به هنگام برخورد یک فشانه به انتهای یک تیر کنسول

یک نشانه یکنواخت به شکل استوانه با سطح A چگالی ρ با سرعت v به انتهای یک تیر کنسول به طول L ، ($\sqrt{A} < L$) برخورد کرده، پخش می‌شود، [شکل (۲۴ - ۶)] رابطه حرکت قائم قسمتی از تیر به طول X به صورت زیر خواهد بود:

$$F + R = m X (f/2) \quad (m)$$

که در آن f شتاب انتهای آزاد تیر، m جرم واحد طول تیر، R نیروی برشی در مقطعی با فاصله X از انتهای آزاد و $F = \rho A v^2$ می‌باشد. فرض می‌شود که $v \gg 2u$ است که در آن u سرعت انتهای تیر است. باید توجه داشت که در لحظه برخورد، نیروی وارد به تیر توسط فشانه برابر با $\rho A v^2$ است و $\rho A v^2$ نیروی حالت یکنواخت و مداوم می‌باشد. اگر در مقطع X لولای پلاستیکی تشکیل شود $R = 0$ خواهد شد و از رابطه (m) نتیجه خواهد شد که

$$f = \frac{2F}{mX} \quad (n)$$

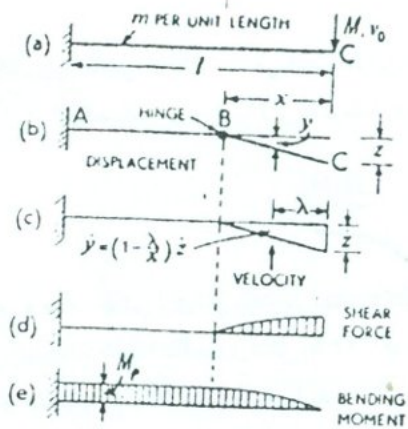
معادله چرخش قسمتی از تیر به طول X حول لولای پلاستیکی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$F \cdot X = M_p + \int_0^X m \omega^2 (X - \lambda) f \left(\frac{X - \lambda}{X} \right) d\lambda$$

$$= M_p + \frac{m f X^2}{3} \quad (o)$$

با قرار دادن f از رابطه (n) در رابطه (o) نتیجه می‌شود:

جسم صلب به جرم M و با سرعت اولیه v_0 که به انتهای آزاد تیر برخورد میکند، قرار می‌گیرد. [شکل (۶-۲۵a)] طول تیر L ، جرم واحد طول آن m و ممان خمشی کامل پلاستیک مقطع تیر M_p می‌باشد. انرژی جنبشی جسم برخوردکننده فقط توسط خمش پلاستیکی می‌تواند مستهلک شود. و به عبارت دیگر، در تیر باید لولای پلاستیکی ایجاد شود. در لحظه برخورد جسم به انتهای تیر، یک لولای پلاستیکی در C تشکیل شده که این لولا به طرف انتهای گیردار تیر حرکت می‌کند. اگر لولا در محلی دورتر از C تشکیل شود، قسمتی از تیر باید بطور ناگهانی چرخش کند، و برای این عمل، ممان چرخشی بسیار زیادی لازم خواهد بود.



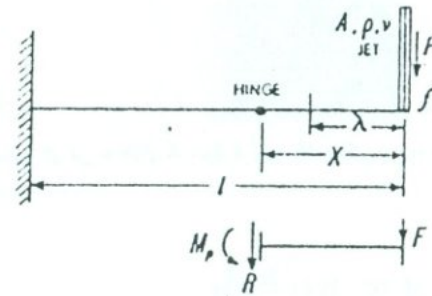
شکل (۶-۲۵)

شکل (۶-۲۵ b) نشان می‌دهد که لولای پلاستیکی در C تشکیل شده است و پس از زمان t در امتداد تیر پیشروی کرده است. در این حالت قسمت BC حول لولای پلاستیکی، چرخش صلب داشته، قسمت AB بدون خیز خواهد بود. با فرض اینکه تغییر شکل کوچک است، اگر سرعت

$$F_1 X = M_p + \frac{2F}{X} \cdot \frac{X^2}{3}$$

$$X = \frac{3M_p}{F} = \frac{3M_p}{A\rho v^2} \quad (۶-۳۴)$$

با قرار دادن X از رابطه (۶-۳۴) در رابطه (۶-۳۳) شتاب انتهای تیر به دست می‌آید. اگر یک گلوله سربی به جرم M و طول h با سرعت v به انتهای یک تیر کنسول برخورد کند و پس از برخورد پخش شود، برای تحلیل برخورد می‌توان گلوله سربی را مشابه فشانه در نظر گرفت. در این صورت $M = A\rho h$ بوده، $X = 3h M_p/v^2 M$ خواهد شد.



شکل (۶-۲۴)

(iii) خمش پلاستیکی یک تیر کنسول در اثر برخورد یک جسم صلب به انتهای آزاد آن یک تیر کنسول از جنس صلب - کامل پلاستیک تحت بار ضربه‌ای عرضی توسط یک

انتهای تیر \dot{z} یا \ddot{z} باشد، سرعت مقطعی از تیر به فاصله λ از این انتها برابر با $\dot{u} = (x-\lambda) \dot{z}/x$ خواهد شد، [شکل (۶-۲۵c)]. با مشتق گرفتن از این رابطه نسبت به زمان، شتاب به طرف پایین تیر در مقطع λ برابر می شود با:

$$f = \frac{x-\lambda}{x} \ddot{z} - \frac{\dot{\lambda}}{x^2} \dot{x} \dot{z}$$

که در آن \ddot{z} نشان دهنده مشتق نسبت به زمان می باشد.

در اثر برخورد جسم صلب، در انتهای تیر نیروی برشی ایجاد شده، این نیرو تغییر کرده، در محل لولای پلاستیکی صفر می شود، [شکل (۶-۲۵d)]. در ضمن، ممان خمشی در انتهای تیر صفر بوده در محل لولا به مقدار ماکزیمم خود به M_p می رسد. از محل لولا تا انتهای گیردار تیر این ممان ثابت خواهد بود، [شکل (۶-۲۵c)].

برای تحلیلی تیر، باید روابط حرکت قایم و حرکت چرخشی قسمت BC را نوشته، بطور همزمان حل کرد. رابطه حرکت قائم قسمت BC به صورت زیر می باشد:

$$M\ddot{z} + \int_0^x m d\lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{x-\lambda}{x} \dot{z} \right) = 0$$

که در آن \dot{z} خیز قائم انتهای آزاد تیر است. از این رابطه نتیجه می شود که

$$M\ddot{z} + \int_0^x m \left(\ddot{z} - \frac{\dot{\lambda} \dot{z}}{x} + \frac{\lambda \ddot{x} \dot{z}}{x^2} \right) d\lambda = 0$$

یا:

$$M\ddot{z} + m \left[\ddot{z} \lambda - \frac{\dot{\lambda} \dot{z}}{2x} + \frac{\lambda^2 \ddot{x} \dot{z}}{2x^2} \right]_0^x = 0$$

در نتیجه:

$$M\ddot{z} + m \left(\frac{x \cdot \ddot{z}}{2} + \frac{\dot{x} \dot{z}}{2} \right) = 0 \quad (p)$$

برای تعادل چرخشی قسمت BC با ممان گرفتن حول c نتیجه خواهد شد:

$$-M_p + \int_0^x (m d\lambda) \frac{d\dot{u}}{dt} \lambda = 0$$

که کسر آن \dot{u} سرعت عرضی المان $m d\lambda$ در مقطع λ می باشد. با قرار دادن مقدار \dot{u} در این رابطه نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} M_p &= \int_0^x m \cdot d\lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{x-\lambda}{x} \dot{z} \right) \lambda \\ &= \int_0^x m \left[\ddot{z} \lambda - \frac{\dot{\lambda} \dot{z}}{x} + \frac{\lambda \ddot{x} \dot{z}}{x^2} \right] \lambda d\lambda \\ &= m \left[\frac{\lambda^2}{2} \ddot{z} - \frac{\lambda^3}{3} \frac{\dot{z}}{x} + \frac{\lambda^3 \ddot{x} \dot{z}}{3x^2} \right]_0^x \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$M_p = m \left[\frac{x^2 \ddot{z}}{6} + \frac{x \dot{x} \dot{z}}{3} \right] \quad (q)$$

دو رابطه (p) و (q) با توجه به شرایط مرزی تیر باید حل شوند. رابطه (p) را می توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$M\ddot{z} \left(1 + \frac{mx}{2M} \right) + \frac{mx \dot{z}}{2} = 0$$

اگر به جای \dot{z} ، v قرار داده شود، این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{mx}{2M} \right) + \frac{m}{2M} \frac{dx}{dt} v = 0$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^x \frac{\frac{m}{2M}}{1 + \frac{m}{2M}x} dx$$

در نتیجه:

در $t = 0$ سرعت انتهای آزاد تیر v_0 است و در زمان t به v می‌رسد. بنابراین:

$$\ln \frac{v_0}{v} = \ln \left(1 + \frac{m}{2M}x \right) \quad (۶-۳۵ ا)$$

یا

$$v = \dot{z} = \frac{v_0}{1 + \frac{m}{2M}x} \quad (۶-۳۵ ب)$$

از این رابطه شتاب انتهای تیر برابر خواهد شد با:

$$\dot{z} = - \frac{v_0 \cdot \frac{m}{2M}}{\left(1 + x \cdot \frac{m}{2M} \right)^2} \quad (۱)$$

تنش برشی در لبه آزاد تیر برابر با $\frac{m}{2M} v_0 x / 2 \left(1 + x \frac{m}{2M} \right)^2$ است و برای $x = 0$ بی‌نهایت می‌شود. وقتی لولای پلاستیکی به انتهای گیردار تیر می‌رسد، $x = L$ سرعت برابر می‌شود با:

$$v_R = \frac{v_0}{1 + mL/2M} \quad (۶-۳۶)$$

حال از رابطه (۴) استفاده می‌شود، بدین منظور این رابطه به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\frac{m}{6} (x^2 \dot{z} + 2x \dot{x}z) = M_p$$

$$\frac{m}{6} \frac{d}{dt} (x^2 \cdot \dot{z}) = M_p$$

یا:

با انتگرال گرفتن از این رابطه نتیجه خواهد شد:

$$x^2 \dot{z} = \frac{6M_p}{m} t + c_1$$

ثابت c_1 با استفاده از شرط اولیه $t = 0, x = 0$ برابر صفر می‌گردد. در نتیجه:

$$t = \frac{mx^2 z}{6 M_p} \quad (۸)$$

اگر مقدار z از رابطه (۶-۳۵ ب) در این رابطه قرار داده شود، نتیجه خواهد شد:

$$t = \frac{mv_0}{6M_p} \cdot \frac{x^2}{\left(1 + \frac{m}{2M}x \right)} \quad (۶-۳۷)$$

با قرار دادن $x = L$ در این رابطه زمان T برای رسیدن لولا به انتهای گیردار برابر می‌شود با:

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{mv_0}{M_p L} \cdot \frac{1}{(1 + 2M/mL)} \quad (۶-۳۸)$$

سرعت پیشروی لولای پلاستیکی از c تا A با استفاده از رابطه (۶-۳۷) برابر خواهد شد با:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{mv_0 L}{6M_p} \left[\frac{2 \cdot \frac{x}{L}}{\left(1 + \beta \frac{x}{L} \right)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{L} \right)^2 \beta}{\left(1 + \beta \frac{x}{L} \right)^2} \right] \quad (۱)$$

یا:

$$\dot{x} = \frac{6m_p}{mLv_0} \cdot \frac{(1 + \beta\mu)^2}{\mu (2 + \beta\mu)} \quad (۶-۳۹)$$

که در آن $\mu = \frac{x}{L}, \beta = mL/2M$ می‌باشند. این عبارت نشان می‌دهد که سرعت لولا در $t = 0$ بی‌نهایت است. این نتیجه با توجه به فرض این که جنس تیر صلب-کامل پلاستیک است از نظر فیزیکی مفهوم دارد، زیرا در چنین جسی سرعت موج پلاستیک بی‌نهایت می‌باشد. پس از رسیدن لولای پلاستیکی به انتهای گیردار، این سرعت کم شده، به مقدار زیر خواهد رسید:

$$\dot{x}_R = \frac{6M_p (1 + \beta)^2}{mLv_0 (2 + \beta)} \quad (۶-۴۰)$$

$$y \frac{12M_p \beta^2}{mv_0^2 L^2} = 2 \ln \frac{(1+\beta)}{(1+\beta\xi)} + \frac{2\beta\xi}{(1+\beta)} - \frac{(1+2\beta\xi)}{(1+\beta\xi)} + \frac{(1+\beta\xi)}{(1+\beta)^2}$$

$$= 2 \ln \frac{(1+\beta)}{(1+\beta\xi)} - \frac{\beta\xi}{(1+\beta\xi)} + \frac{\beta(3\xi-2)}{(1+\beta)} + \frac{\beta^2(1-\xi)}{(1+\beta)^2}$$

یا:

$$y = \frac{(Mv_0)^2}{3M_p m} \left[2 \ln \frac{(1+\beta)}{(1+\beta\xi)} - \frac{\beta\xi}{(1+\beta\xi)} + \frac{\beta(3\xi-2)}{(1+\beta)} + \frac{\beta^2(1-\xi)}{(1+\beta)^2} \right]$$

$$\equiv \frac{(Mv_0)^2}{3M_p m} D \quad (6-41)$$

وقتی لولای پلاستیکی پس از زمان $t = T$ به انتهای گیردار تیر می‌رسد، جسم M و تیر هنوز دارای انرژی جنبشی هستند. این انرژی باقیمانده باید توسط مان خمشی M_p در A با چرخشی به اندازه θ_R مستهلک گردد. به عبارت دیگر، تیر خمیده شده باید به صورت صلب حول لولای چرخشی برابر با θ_R داشته باشد. بدین ترتیب، خیز اضافی مقطع λ برابر خواهد شد با:

$$y_i = (L - \lambda)\theta_R \quad (v)$$

حالا، انرژی چرخشی تیر E_R در زمان T برابر است با:

$$E_R = \int_0^L \frac{1}{2} (m \cdot d\lambda) \left(\frac{L-\lambda}{L} \dot{z}_R \right)^2$$

$$= \frac{m \dot{z}_R^2}{2L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{mL v_R^2}{6} = \frac{mLv_0^2}{6 \left(1 + \frac{mL}{2M}\right)^2} \quad (w)$$

برای بررسی منحنی تغییر شکل تیر، وقتی که لولای پلاستیکی به انتهای گیردار می‌رسد، با استفاده از شکل (۶-۲۵) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\dot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{x-\lambda}{x} \dot{z}$$

که با استفاده از رابطه (۶-۳۵ b) نتیجه می‌شود:

$$y = \int \frac{x-\lambda}{x} \frac{v_0}{1 + \frac{m}{2M}x} dt$$

اگر به جای dt مقدار آن از رابطه (۱) قرار داده شود، y برابر خواهد شد با:

$$y = \int_{\lambda}^L \left(1 - \frac{\lambda}{x}\right) \frac{v_0}{\left(1 + \frac{m}{2M}x\right)} \frac{mv_0}{6M_p} \left[\frac{2x}{\left(1 + \frac{m}{2M}x\right)} - \frac{\frac{m}{2M}x^2}{\left(1 + \frac{m}{2M}x\right)^2} \right] dx \quad (u)$$

حد انتگرال از زمان رسیدن لولا به مقطع λ تا انتهای گیردار تیر می‌باشد.

با فرض $g = (1 + mx/2M)$ ، $x = (g-1)L/\beta$ ، $\lambda/L = \xi$ و در ضمن با قرار دادن ξ در رابطه (u) به صورت زیر در می‌آید:

$$y = \frac{6M_p}{mv_0^2} \cdot \frac{\beta^2}{L^2} = \int_{1+\beta\xi}^{1+\beta} \left(\frac{1}{g} - \frac{\beta\xi}{g^2} - \frac{1+\beta\xi}{g} \right) dg$$

$$= \ln \frac{(1+\beta)}{(1+\beta\xi)} + \beta\xi \left(\frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{1+\beta\xi} \right)$$

$$+ \frac{(1+\beta\xi)}{2} \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(1+\beta\xi)^2} \right]$$

رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$= \frac{(Mv_0)^2}{3mM_p} \left[\frac{mL}{2M} \cdot \frac{2\beta + 3}{(1 + \beta)^2} \cdot (1 - \xi) + D \right]$$

مقدار D در رابطه (۴۱ - ۶) مشخص شده است. با قرار دادن D و مرتب کردن رابطه نتیجه

$$y_1 = \frac{(Mv_0)^2}{3m M_p} \left[\frac{\beta}{1 + \beta} - \frac{\beta\xi}{1 + \beta\xi} + 2 L_n \frac{(1 + \beta)}{(1 + \beta\xi)} \right] \quad (۶ - ۴۴ a)$$

یا

$$\frac{(y_1 / L) M_p}{1/2 M v_0^2} = \frac{1}{3(1 + \beta)} - \frac{\xi}{3(1 + \beta\xi)} + \frac{2}{3} \frac{1}{\beta} L_n \frac{(1 + \beta)}{(1 + \beta\xi)} \quad (۶ - ۴۴ b)$$

دو حالت حد برای نسبت جرم جسم ضربه زن و جرم تیر وجود دارد.

(a) این نسبت بسیار بزرگ است و به عبارت دیگر $\beta \rightarrow 0$

در این حالت از رابطه (۴۴ a - ۶) نتیجه می‌شود:

$$y_1 = \frac{(Mv_0)^2}{3M_p m} \left[\beta - \beta\xi + 2 L_n (1 + \beta) (1 - \beta\xi) \right]$$

$$= \frac{(Mv_0)^2}{3M_p m} \left[\beta - \beta\xi + 2 (\beta - \beta\xi) \right]$$

$$= \frac{(Mv_0)^2}{M_p m} \left[\beta (1 - \xi) \right]$$

$$= 1/2 \frac{Mv_0^2 L}{M_p} (1 - \xi) \quad (۶ - ۴۵ a)$$

یا:

$$\frac{(y_1 / L) M_p}{1/2 M v_0^2} = 1 - \xi \quad (۶ - ۴۵ b)$$

(b) نسبت M/mL بسیار کوچک است و به عبارت دیگر: $\beta \rightarrow \infty$

در این حالت نتیجه خواهد شد:

که در آن زیر نویس R نشان‌دهنده مقادیر مختلف در زمان رسیدن لولا به A می‌باشد.

انرژی کلی که باید توسط کار پلاستیکی لولا در انتهای گیردار تیر مستهلک شود، جمع E_{IR} و انرژی باقیمانده جسم $Mv_R^2/2$ است. در نتیجه، رابطه تعادل کلی به صورت زیر در می‌آید:

$$M_p \cdot \theta_R = \frac{mL v_R^2}{6} + \frac{Mv_R^2}{2} \quad (۸)$$

با حذف θ_R بین روابط (۷) و (۸)، y_1 برابر می‌شود با:

$$y_1 = \left(\frac{ml}{6} + \frac{M}{2} \right) \frac{v_R^2}{M_p} (1 - \lambda) \quad (۹)$$

از طرف دیگر، به کمک روابط (۳۶ - ۶)، زاویه چرخش تیر θ_R برابر خواهد شد با:

$$\theta_R = \frac{2}{3} M v_0^2 \frac{(3 + \frac{mL}{M})}{M_p (2 + \frac{mL}{M})^2} \quad (۶ - ۴۲)$$

با قرار دادن مقدار θ_R از رابطه (۳۶ - ۶) در رابطه (۹) نیز نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{mL}{6} + \frac{M}{2} \right) \frac{v_0^2}{(1 + \beta)^2} \frac{(1 - \lambda)}{M_p} \\ &= \left(\frac{mL}{2M} + \frac{3}{2} \right) \frac{v_0^2}{(1 + \beta)^2} \frac{(1 - \xi)ML}{3M_p} \end{aligned} \quad (۶ - ۴۳)$$

با توجه به بحث فوق خیز کلی تیر y_1 برابر می‌شود با:

$$y_1 = y + y_1 = \frac{\beta + \frac{3}{2}}{(1 + \beta)^2} \cdot \frac{Mv_0^2}{3} \cdot \frac{(1 - \xi)L}{M_p} + y$$

STRIKER WEIGHT lb	SPEED OF PROJECTILE IN/SEC	CANTILEVER LENGTH IN	CANTILEVER LENGTH IN	SPEED OF PROJECTILE T/SEC	STRIKER WEIGHT lb
0.0043	970	2	2	6.4	4
		4	4	6.4	
		8	8	6.4	
		12	12	6.4	
0.0050	970	2	2	9.0	4
		4	4	9.0	
		8	8	9.0	
		12	12	9.0	
0.0050	1580	2	2	12.7	1
		4	4	12.7	
		8	8	12.7	
		12	12	12.7	
0.0050	1580	2	2	18.0	1
		4	4	18.0	
		8	8	18.0	
		12	12	18.0	

ALL CANTILEVERS OF MILD STEEL AND 1/2" x 1/4"

شکل (۶-۲۷)

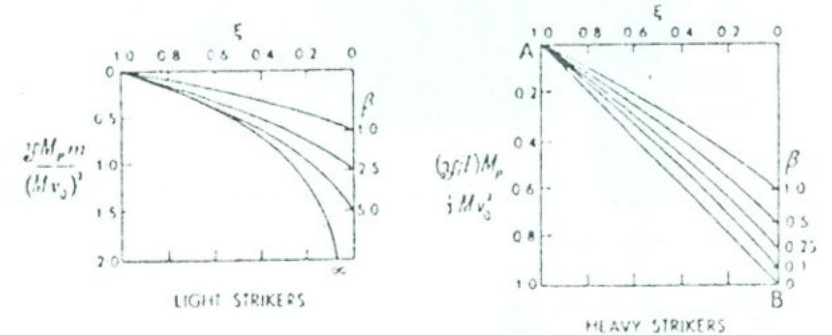
انرژی مستهلک شده در لولای پلاستیکی متحرک برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned}
 & 1/2 M v_0^2 - \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - E_R \\
 & = 1/2 M v_0^2 - 1/2 M \dot{z}^2 - \frac{mL \dot{z}^2}{6} \\
 & = 1/2 M v_0^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{3M}{2M} + \frac{mL}{2M} \right) \frac{v_0^2}{(1+\beta)^2} 2M \\
 & = 1/2 M v_0^2 - \frac{2 \left(\frac{3}{2} + \beta \right)}{3(1+\beta)^2} \left(\frac{M v_0^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_t & \approx \frac{(M v_0')^2}{3M_p m} \left[1 - 1 + 2 I_n \frac{1}{\xi} \right] \\
 & = \frac{1}{3\beta} \frac{M v_0'^2 L}{M_p} I_n \frac{1}{\xi} \quad (6-46a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{(y_t/L) M_p}{1/2 M v_0'^2} = \frac{1}{6\beta} I_n \frac{1}{\xi} \quad (6-46b)$$

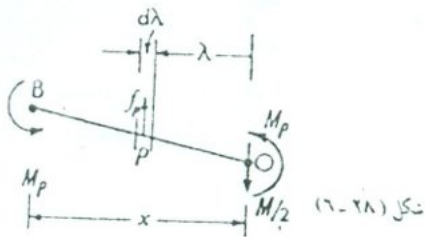
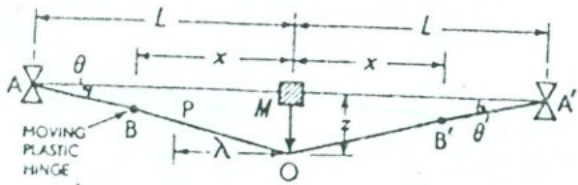
شکلهای (۶-۲۶ a) و (۶-۲۶ b) تغییرات $(y_t/L) M_p / 1/2 M v_0'^2$ ، $y_t M_p m / (M v_0')^2$ و $(4-44 b)$ نشان می‌دهند. شکل (۶-۲۶ a) برای نسبت به ξ را با توجه به روابط (۶-۴۴a) و (۶-۴۴b) نشان می‌دهند. شکل (۶-۲۶ b) برای وزن سبک و شکل (۶-۲۶ h) مربوط به وزنه سنگین می‌باشد. خط مستقیم AB در شکل (۶-۲۶h) بر مبنای رابطه (۶-۴۵ h) و به عبارت دیگر، برای حالت $\beta \rightarrow \infty$ رسم شده است. تحلیل ارائه شده فوق، برای خمش پلاستیکی تیر کنسول در اثر برخورد یک جسم صلب، بر مبنای کارهای پارک^۱ ارایه شده است. نتایج تجربی بدست آمده توسط پارک^۱ نیز در شکل (۶-۲۷) نشان داده شده است که قابل مقایسه با نتایج شکل (۶-۲۶ b) است.



شکل (۶-۲۶)

1 - Parks, E. W. "The permanent deformation of cantilever struck transversely at its tip" proc. R. soc., series A, 228, 1955

(iv) رفتار پلاستیکی تیر روی تکیه‌گاه ساده در اثر بار ضربه در مرکز تیر در قسمت قبل، تحلیل پلاستیکی تیر کنسول با استفاده از پنداره لولای پلاستیکی ارایه شد. در این قسمت رفتار تیر روی تکیه‌گاه ساده تحت بار دینامیکی حاصل از یک ضربه زن صلب با استفاده از مقاله "ازرا" مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که خیز تیر کوچک است و انرژی جنبشی ضربه زن توسط لولای پلاستیکی متحرک مستهلک می‌گردد. عکسبرداری از تیر، بلافاصله بعد از اعمال ضربه نشان می‌دهد که قسمت زیر بار، شکل ۷ بر خود می‌گیرد. در حالیکه دونیمه تیر (جدا از قسمت زیر بار) تقریباً بدون خیز باقی می‌مانند. از لحظه برخورد یک لولای پلاستیکی در زیر بار دو لولای پلاستیکی متحرک از وسط به طرف تکیه‌گاه تشکیل شده، به گونه‌ای که قسمتهای تیر بین لولاها صلب باقی می‌مانند. بین لولاها متحرک و تکیه‌گاهها، دو قسمت بدون تغییر شکل تیر، حول تکیه‌گاه، چرخش خواهند داشت. این چرخش، همانطور که در پیکر آزاد شکل (۶-۲۸ b) برای OB نشان داده شده است، در اثر میان M_p در B رخ می‌دهد. میان خمشی در لولای پلاستیکی B، B' [شکل (۶-۲۸ a)] میان تسلیم است و با توجه به اینکه بین A، O، بار متمرکزی وجود ندارد، نمودار نیروی برشی پیوسته خواهد بود، و در ضمن نیروی برشی در B و B' صفر می‌باشد.



شکل (۶-۲۸)

1 - Ezra, A. A. "The plastic response of a simply supported beam to an impact load at its center" *proc. Third u. s. Nat. congr. appl. Mech. Am. soc. mech. Eng.* 1538, 1958

$$= 1/2 M v_0^2 \left[1 - \frac{(1 + \frac{2}{3} \beta)}{(1 + \beta)^2} \right] \quad (۶-۲۷ a)$$

بنابراین، کسری از انرژی اولیه جسم ضربه‌زن که در لولای پلاستیکی متحرک مستهلک می‌شود برابر خواهد شد با:

$$q = \frac{\gamma(8 + 3\gamma)}{3(2 + \gamma)^2} \quad (۶-۲۷ b)$$

که در آن $\gamma = 2\beta$ نسبت جرم تیر کنسول به جرم ضربه‌زن می‌باشد. برای مقادیر مختلف γ ، q در جدول (۶-۱) آورده شده است.

جدول (۶-۱)

γ	0	1/6	1/3	1/2	1	2	5	8	12 1/2	18	198
q	0	0.063	0.138	0.25	0.31	0.41	0.58	0.78	0.85	0.90	0.99

می توان نشان داد که لولاهای پلاستیکی کمی بیشتر از $L/2$ جلو رفته، سپس ثابت می شوند. در این موقعیت مرحله اول تغییر شکل متوقف می شود، و مجموعه تیر در مرحله دوم حول لولای پلاستیکی ثابت چرخش صلب خواهند داشت. در نتیجه باقیمانده انرژی جنبشی وزنه و انرژی جنبشی دو نیمه تیر توسط کار پلاستیکی لولای پلاستیکی ثابت مستهلک می گردد. وضعیت نشان داده شده در شکل (۶-۲۶a) برای زمان کمی پس از اعمال ضربه می باشد.

(a) حرکت به طرف پایین OB

سرعت به طرف پایین نقطه P بین O، B برابر می شود با:

$$\begin{aligned} v_p &= \text{سرعت } p \text{ نسبت به } B + B \text{ سرعت} \\ &= (L-x)\dot{\theta} + [z - (L-x)\dot{\theta}] \left(\frac{x-\lambda}{x} \right) \\ &= z \left(1 - \frac{\lambda}{x} \right) + \frac{\lambda}{x} (L-x)\dot{\theta} \end{aligned} \quad (a_1)$$

بنابراین، شتاب نقطه P برابر می شود با:

$$f_p = \frac{dv_p}{dt} = z \left(1 - \frac{\lambda}{x} \right) + z \left(\frac{\lambda \dot{x}}{x^2} \right) - \frac{\lambda}{x^2} (L-x) \dot{x} \dot{\theta} + \frac{\lambda}{x} (\dot{x}) \dot{\theta} + \frac{\lambda}{x} (L-x) \ddot{\theta} \quad (b_1)$$

نیروی اینرسی OB به طرف بالا است و این نیرو با نیروی به طرف پایین $Mz/2$ در حالت تعادل می باشد. بنابراین، اگر جرم واحد طول تیر m باشد، نتیجه خواهد شد:

$$\frac{M}{2} z + \int_0^x m d\lambda f_p = 0 \quad (c_1)$$

با قرار دادن f_p از رابطه (b₁) در رابطه (c₁) نتیجه زیر به دست می آید:

$$\frac{M}{2} z + m \left[z \frac{x}{2} + \frac{zx}{2} \cdot \frac{(L-x)x\dot{\theta}}{2} - \frac{zx\dot{\theta}}{2} + \frac{x(L-x)\ddot{\theta}}{2} \right] = 0$$

که به صورت زیر ساده می شود:

$$(M + mx) \ddot{z} + mx \ddot{\theta} (L-x) + mx (z - L\dot{\theta}) = 0 \quad (۶-۲۸)$$

(b) چرخش OB:

رابطه چرخش OB با گرفتن ممان حول O به صورت زیر در می آید:

$$2M_p = \int_0^x m d\lambda \cdot f_p \lambda \quad (d_1)$$

با قرار دادن مقدار f_p از رابطه (b₁) نتیجه می شود:

$$2M_p = m \int_0^x \left[\left(1 - \frac{\lambda}{x} \right) z + \frac{\lambda}{x^2} \cdot x\dot{z} + (L-x)\dot{\theta} \frac{\lambda}{x} - \frac{\dot{\theta}\lambda}{x} - \frac{(L-x)\dot{\theta}\lambda}{x^2} \right] \lambda d\lambda$$

که پس از انتگرال گرفتن و ساده کردن به صورت زیر در می آید:

$$12 M_p = m [x^2 \ddot{z} + 2x^2 (L-x) \ddot{\theta} + 2xx (z - L\dot{\theta})] \quad (۶-۲۹)$$

(c) چرخش AB:

برای قسمت AB [شکل (۶-۲۸ a)] چرخش حول تکیه گاه A رخ می دهد. به این قسمت ممان M_p وارد می آید و شتاب زاویه ای آن $\dot{\theta}$ می باشد. ممان اینرسی AB نسبت به A برابر با $I_A = m(L-x)^3/3$ خواهد شد و با توجه به رابطه:

$$M_p = I_A \ddot{\theta}$$

نتیجه خواهد شد:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{(L-x)^2}, \quad x = (2 \cdot \sqrt{2}) L \approx 0.59 L \quad (۶-۵۲ \text{ a})$$

$$M/mL \rightarrow 0 \quad (\text{ii})$$

مجدداً از رابطه (۶-۵۱ b) نتیجه خواهد شد:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x} = \frac{x}{(L-x)^2}, \quad x = \frac{2}{3} L \quad (۶-۵۲ \text{ b})$$

$$\frac{M}{mL} \rightarrow 1 \quad (\text{iii})$$

در این حالت نتیجه می‌شود:

$$x = 0.61 L$$

$$(۶-۵۲ \text{ c})$$

برای مقادیر مختلف M/ml فاصله وسط تیر تا محل توقف لولای پلاستیکی بین $0.59L$ و $0.67L$ خواهد بود.

برای مقدار کم α و به عبارت دیگر، مقادیر کوچک x ، Z از رابطه (۶۱) بزرگ خواهد شد. در ضمن، با توجه به رابطه (۶۱) چون در $t = 0$ ، $\theta = 0$ است، و از طرفی $x = 0$ و \dot{Z} برابر v_0 می‌باشد، نتیجه خواهد شد $\dot{x} \rightarrow \infty$. رابطه (۶-۵۰) نیز نشان می‌دهد که θ مقدار معین و محدودی خواهد داشت.

عکسبرداری سریع از تیر ساده در مراحل اولیه ضربه، نشان می‌دهد که قسمت‌های انتهایی تیر بدون تغییر شکل بوده فقط چرخش خواهند داشت. بدین ترتیب، با حذف θ و $\dot{\theta}$ در روابط (۶-۴۸)، (۶-۴۹)، (۶-۵۰) یک مجموعه معادلات دیفرانسیل به دست می‌آید. که اگر حل شود، وضعیت حرکت تیر را در مراحل اولیه حرکت بطور تقریبی نشان خواهد داد.

در این صورت رابطه (۶-۴۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$(M + mx) \dot{Z} + m x \dot{Z} = 0$$

یا:

$$d(MZ + mxZ) dt = 0 \quad (۶۱)$$

(۶۱)

$$3 M_p = m (L-x)^3 \ddot{\theta} \quad (۶-۵۰)$$

(d) موقعیت حد لولای پلاستیکی متحرک

اگر رابطه (۶-۴۸) در $2x$ ضرب شده، از رابطه (۶-۴۹) کم شود، نتیجه می‌شود:

$$\ddot{z} = -12 M_p / (2 Mx + mx^2) \quad (۶۱)$$

حال اگر مقدار \ddot{z} از رابطه (۶۱) و مقدار $\ddot{\theta}$ از رابطه (۶-۵۰) در رابطه (۶-۴۸) قرار داده شوند، نتیجه خواهد شد:

$$\dot{x} (\dot{Z} - L\dot{\theta}) = \frac{3M_p}{m} \left[\frac{2}{x} + \frac{2}{2 \frac{M}{m} + x} - \frac{x}{(L-x)^2} \right] \quad (۶۱)$$

لولای پلاستیکی وقتی متوقف می‌شود که $x = 0$ باشد. اگر $x = 0$ باشد هر نیمه از تیر به صورت یک جسم صلب عمل می‌کند و در نتیجه $\dot{Z} - L\dot{\theta}$ نیز صفر خواهد شد. بدین ترتیب، طرف راست رابطه (۶۱) برای برآوردن شرط فوق باید صفر گردد. در نتیجه:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{2 \frac{M}{m} + x} = \frac{x}{(L-x)^2} \quad (۶-۵۱)$$

با حل این رابطه، مقدار x برای موقعیت حد لولای پلاستیکی به دست می‌آید. برای مثال: در سه حالت زیر x برابر می‌شود با:

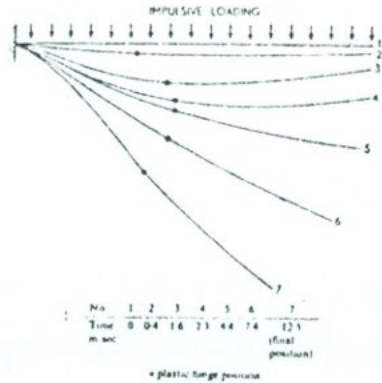
$$M/m \rightarrow \infty \quad (i)$$

در این حالت از رابطه (۶-۵۱) نتیجه می‌شود:

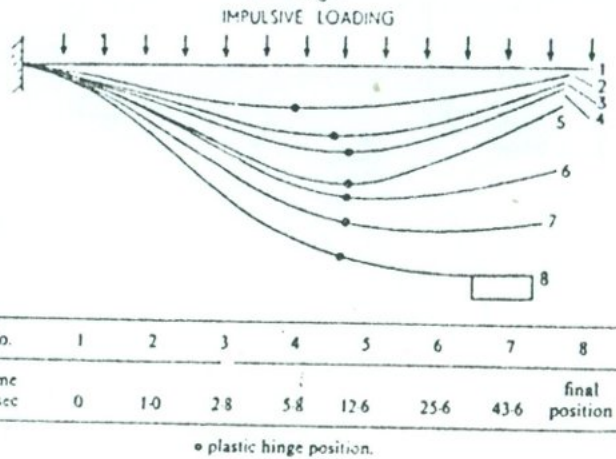
$$z = \frac{M^2 v_0^2}{12 M_p m} \cdot \left[1_n \left(1 + \frac{m}{M} x \right) - \frac{mx (2M + mx)}{2(M + mx)^2} \right] \quad (۶-۵۳)$$

(۷) تیر کنسول تحت بار ضربه‌ای گسترده یکنواخت

برای اعمال بار ضربه‌ای گسترده می‌توان از نیروی رانش مغناطیس یک سیم پیچ تخلیه سریع خازن استفاده کرد. با استفاده از این نوع بار، رفتار تیر کنسول و موقعیت نهایی لولای پلاستیکی در شکل‌های (۶-۲۹) و (۶-۳۰) آورده شده است. در شکل (۶-۲۹) انتهای آزاد تیر بدون وزنه اضافی است، و حال آنکه در شکل (۶-۳۰) وزنه‌ای در انتهای آزاد اضافه شده است.



شکل (۶-۲۹)



شکل (۶-۳۰)

رابطه (۶-۴۹) نیز به صورت زیر در می‌آید:

$$m \ddot{z} x^2 + 2m \dot{x} \dot{z} = 12 M_p$$

$$d(m \dot{x}^2 z) / dt = 12 M_p \quad (h_1)$$

با انتگرال گرفتن از رابطه (h₁) و با استفاده از شرط $\dot{z} = v_0, x = 0, t = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\dot{z} = \frac{M v_0}{M + mx} \quad (i_1)$$

در ضمن با انتگرال گرفتن از رابطه (h₁) نیز نتیجه خواهد شد:

$$m x^2 \dot{z} = 12 M_p t \quad (j_1)$$

حال با حذف \dot{z} بین روابط (j₁)، (i₁) مشتق گرفتن نسبت به x و برابر می‌شود با:

$$\dot{x} = \frac{12 M_p}{M m v_0} \frac{(M + mx)^2}{x (2M + mx)} \quad (k_1)$$

خیر وسط تیر:

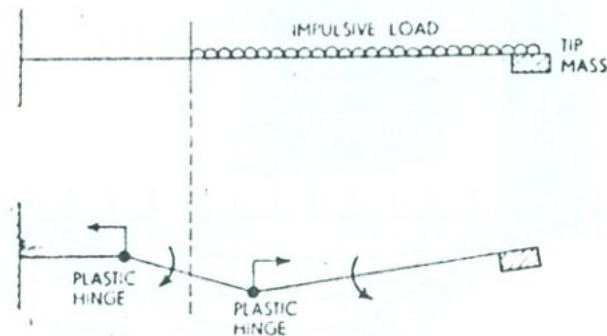
با تقسیم کردن روابط (i₁) به رابطه (k₁) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{M v_0}{M + mx} \cdot \frac{M m v_0}{12 M_p} \cdot \frac{x (2M + mx)}{(M + mx)^2} \quad (L_1)$$

با فرض $M + mx = s$ نتیجه خواهد شد:

$$z = \int_0^x \frac{M^2 v_0^2}{12 M_p m} \cdot \frac{s^2 - M^2}{s^4} ds$$

در شکل (۳۱-۶) یک تیرکنسول با وزنه‌ای در انتها، تحت بار ضربه‌ای گسترده و یکنواخت در قسمتی از تیر نشان داده شده است. در لحظه بارگذاری قسمت تحت بار، سرعت یکنواخت به طرف پایین خواهد داشت. در ضمن، بلافاصله پس از بارگذاری دو لولای پلاستیکی تشکیل شده است این دو لولا در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. بسته به مشخصات تیر، وزنه انتها و شدت بارگذاری شکل‌های مختلف فرو ریزش رخ می‌دهد. یکی از این شکل‌های فرو ریزش در شکل (۳۱-۶) آورده شده است.

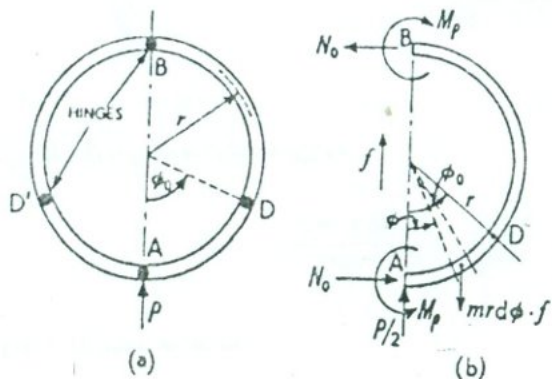


شکل (۳۱-۶)

۱۲-۶- بارگذاری دینامیکی حلقه‌ها

تغییر شکل پلاستیکی حلقه‌های گرد در قسمت (۴-۶) مورد بررسی قرار گرفت. در بررسی ارایه شده اینرسی سازه نقش چندانی در شکل فرو ریزش حلقه نداشت. در این قسمت، با توجه به اثر اینرسی جسم، تحلیل حلقه‌ها ارایه می‌گردد.

(i) موقعیت اولیه لولاهای پلاستیکی در یک حلقه گرد و آزاد تحت بار دینامیکی متمرکز یک حلقه دایره‌ای به شعاع متوسط r و جرم واحد طول m تحت بار ناگهانی P قرار می‌گیرد، [شکل (۳۲a-۶)] بلافاصله پس از ضربه حلقه به صورت یک جسم صلب حرکت می‌کند، تا زمانی که نیروی اینرسی به اندازه کافی زیاد شده، مقاطع خاصی از حلقه به صورت کامل پلاستیک در آید. به عبارت دیگر، در این زمان ممان این مقاطع M_p گردیده و لولای پلاستیکی تشکیل می‌شود. با توجه به تقارن، اولین لولا زیر بار P در A و لولای دیگر روی قطر AB و در محل B تشکیل خواهد شد، [شکل (۳۲a-۶)]. برای این که حلقه به صورت مکانیزم در آید و بتواند تغییر شکل پلاستیکی دهد، حداقل چهار لولای پلاستیکی لازم است. دو لولای دیگر نیز متقارن بوده، فرض می‌شود با زاویه ϕ_0 نسبت به AB تشکیل شود.



شکل (۳۲-۶)