## 4-1 مقدمه:

باتوجه به آنچه که در سه بخش قبل مرور شد، توزیع تنش، کرنش و تغییرمکان در یک جسم الاستیک تحت بارگذاری خاص، باتوجه به شرایط پایه‌ای زیر می‌تواندبدست آید؛

۱- روابط تعادل باید در تمام جسم برقرار باشد،

۲- روابط الاستیک خطی تنش - کرنش (روابط هوک) در جسم صادق باشد،

۳- اجزاء کرنش بدست آمده از مشتقات تغییر مکان با هم سازش داشته باشند،

۴- میدانهای تنش، کرنش و تغییر مکان با شرایط بارگذاری و شرایط مرزی هم‌آهنگی داشته باشند.

با استفاده از شرایط فوق می‌توان روابط الاستیسیته را بدست آورد. برای مسائل سه محوری در الاستیسیته لازم است 15 مقدار زیر محاسبه گردند: شش مؤلفه تنش، شش مؤلفه کرنش و سه مؤلفه تغییر مکان.

این 15 مقدار باید 15 رابطه الاستیسیته و شرایط مرزی را ارضاء نمایند. 15 رابطه الاستیسیته عبارتنداز: سه رابطه تعادل، شش رابطه تنش - کرنش، و شش رابطه کرنش - تغییر مکان. باید توجه داشت که روابط سازش از روابط کرنش - تغییر مکان بدست می‌آیند که خود در 15 رابطه فوق منظور شده‌اند. در نتیجه اگر 15 رابطه ارضاء شوند، روابط سازش نیز برقرار خواهند بود. مسائل سه محوری اغلب به روابط پیچیده‌ای می‌رسند و در این کتاب مورد بحث قرار نمی‌گیرند.

در بسیاری از مسائل مهندسی با استفاده از فرضهای ساده کننده‌ای می‌توان به نتایج قابل قبول دست یافت. بدینطریق برخی مسائل سه محوری به دومحوری تقلیل می‌یابد که راه حل ساده‌تری دارند. در این رابطه دو حالت «کرنش صفحه‌ای»[1] و «تنش صفحه‌ای»[2] از اهمیت خاصی برخوردار است و در این بخش مورد تحلیل و بررسی

1- Plane strain

2- Plane stress

قرار می‌گیرد.

## 4-2 مسائل کرنش صفحه‌ای

یک میله منشوری بلند تحت بار خارجی (مثل یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار) بین دو صفحه صاف، و صلب مطابق شکل (4-1) نگهداشته شده است. فرض می‌شود که بارهای خارجی فقط توابعی از مختصات x و y هستند. در نتیجه انتظار می‌رود که همه سطوح میله، من جمله سطوح انتهائی تغییر شکل یکسانی داشته باشند. دو سطح انتهائی صاف و بدون اصطکاک فرض می‌شوند، در نتیجه دو انتها می‌توانند تغییر مکان در جهت‌های x و y داشته باشند، ولی باتوجه به صلب بودن آنها، تغییر مکان در جهت z صفر است. بدین ترتیب در $z = \pm L/2$، $w=0$ می‌باشند. به علت تقارن w باید برای سطح میانی نیز صفر باشد. با بحث تقارن می‌توان نتیجه گرفت که در $z = \pm L/4$ و یا هر سطح دیگر، $w=0$ است. در نتیجه کرنش‌ها فقط به x و y بستگی خواهند داشت؛

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4-1}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0\ ,\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\ ,\ \ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{4-2}$$

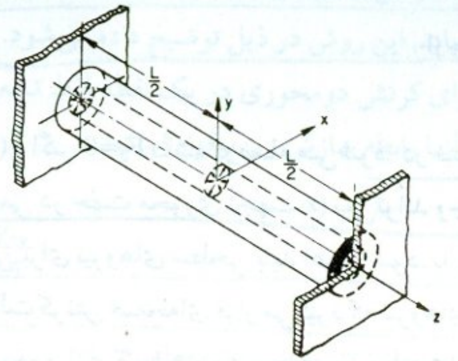
از دو عبارت آخری می‌توان نتیجه گرفت که چون w و مشتقات آن صفر هستند، $\frac{\partial u}{\partial z}$ و $\frac{\partial v}{\partial z}$ نیز صفر خواهند بود. بدین ترتیب حالت کرنش صفحه‌ای بدینصورت می‌تواند تعریف شود که هر نقطه از جسم ضمن بارگذاری در صفحه عرضی اولیه خود باقی می‌ماند. حال سایر روابط یک جسم تحت کرنش صفحه‌ای بررسی می‌شود.

با قرار دادن $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ در رابطهٔ (3-6)، روابط تنش ـ کرنش به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{4-3a}$$

و






شکل (4-1)

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad \sigma_z = \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu\,(\sigma_x + \sigma_y) \tag{a}$$

چون $\sigma_z$ در سایر روابط کرنش ـ صفحه‌ای ظاهر نمی‌شود، مستقلاً از رابطهٔ (a) محاسبه می‌شود. روابط کرنش ـ تنش، روابط (4-3)، در این حالت بصورت زیر درمی‌آیند؛

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_x\right) \tag{4-3b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

باتوجه به اینکه مؤلفه‌های تنش‌ها فقط توابعی از x و y هستند، روابط تعادل در کرنش صفحه‌ای، با استفاده از روابط (1-5) به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_y} + F_x = 0$$

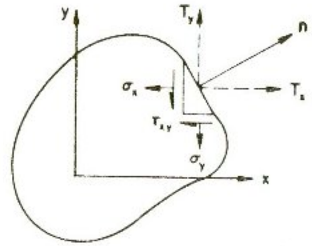
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial_y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_x} + F_y = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

رابطهٔ سوم (5-1) ، اگر $F_z=0$ باشد ارضاء می‌شود. در نتیجه درحالت کرنش صفحه‌ای نیروی حجمی در جهت محوری (جهت z) نمی‌تواند وجود داشته باشد.

محدودیت مشابهی برای نیروهای سطحی باید اعمال شود. بدین معنی که وقتی یک جسم منشوری در حالت کرنش صفحه‌ای قرار می‌گیرد که نیروهای سطحی $T_x$ و $T_y$ هر کدام توابعی از x و y بوده و $T_z=0$ باشد. روی سطح جانبی n=0 است، شکل (2-4)، و شرایط مرزی از رابطهٔ (31-1) به صورت زیر خواهد بود؛

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m$$
$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \qquad (4\text{-}5)$$

بنابراین در یک مسأله کرنش صفحه‌ای، هشت مقدار $\sigma_x$ $\sigma_y$ $\tau_{xy}$ $\varepsilon_x$ $\varepsilon_y$ $\gamma_{xy}$ ، u و v باید طوری بدست آیند که در روابط (1-4) ، (3-4) و (4-4)، صادق باشند و شرایط مرزی (4-5) را ارضاء نمایند.




شکل (2-4)

برای حل یک مسأله کرنش صفحه‌ای ابتدا هشت رابطهٔ حاکم، (1-4)، (4-3a) و (4-4)، به سه رابطه تقلیل می‌یابد. این روش در ذیل توضیح داده می‌شود.

سه رابطه (3-1) برای کرنش دومحوری در یک نقطه فقط تابعی از دو متغیر u و v هستند. در نتیجه بین آنها رابطه سازش زیر برقرار است؛

$$\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (4\text{-}6)$$

رابطهٔ (6-4) ، معادله سازش برحسب مؤلفه‌های کرنش است. با استفاده از روابط هوک و روابط تعادل، می‌توان آن را برحسب مؤلفه‌های تنش نرمال تنظیم نمود. با جایگذاری کرنش‌ها برحسب تنش‌ها، و استفاده از رابطهٔ (4-3b) ، رابطهٔ (6-4) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-\nu)\,\sigma_x - \nu\sigma_y\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-\nu)\,\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = 2\,\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial_x \partial_y} \qquad (b)$$

با مشتق‌گرفتن از روابط اول و دوم (4-4) به ترتیب نسبت به x و y و جمع کردن آنها نتیجه می‌شود؛

$$2\,\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial_x \partial_y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial_y^2}\right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial_x} + \frac{\partial F_y}{\partial_y}\right) \qquad (c)$$

اگر رابطهٔ (c) در رابطهٔ (b) قرار داده شود، رابطهٔ سازش برحسب تنش‌های نرمال به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial_x} + \frac{\partial F_y}{\partial_y}\right) \qquad (4\text{-}7)$$

سه رابطهٔ (4-4) و (7-4) برای به دست آوردن $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\tau_{xy}$ در مسائل کرنش صفحه‌ای به کار می‌رود. نتایج بدست آمده باید شرایط مرزی (5-4) را ارضاء نماید. پس از تعیین

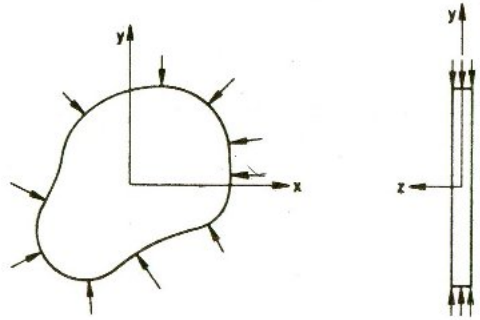
تنش‌ها،کرنش‌ها و تغییر مکانها به ترتیب از روابط (4-3a) و (4-1) محاسبه می‌شوند. در قسمت (4-4) ، سه رابطهٔ (4-4) و (4-7) به یک رابطه برحسب یک متغیر تقلیل داده می‌شود.

## 4-3 مسائل تنش صفحه‌ای

در عمل مسائل زیادی وجود دارد که شرایط تنش صفحه‌ای در آن‌ها حاکم است. حالت تنش صفحه‌ای در قسمت (4-1) تشریح شده است و در این قسمت روابط حاکم و روش حل آنها بررسی می‌شود.

برای تشریح یک حالت تنش صفحه‌ای، ورق نازکی مطابق شکل (4-3) در نظر گرفته می‌شود. بار خارجی در امتداد ضخامت ورق یکنواخت می‌باشد. برای پیدا کردن حالت تنش در ورق، فرض می‌شود $\sigma_z$ ، $\tau_{xz}$ و $\tau_{yz}$ روی دو رویهٔ کناری صفر هستند. چون ورق نازک است، این حالت تنش در همه ورق تقریباً برقرار است. به عنوان شرط مسأله نیروهای حجمی $F_z = 0$ ، $F_x$ و $F_y$ فقط به صورت توابعی از x و y خواهند بود. در نتیجه حالت تنش در ورق به صورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_x \quad , \quad \sigma_y \quad , \quad \tau_{xy}$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{4-8}$$




شکل (4-3)



مؤلفه‌های غیرصفر تنش در امتداد ضخامت ورق ثابت بوده، و فقط توابعی از x و y خواهند بود. وضعیت فوق حالت تنش صفحه‌ای نامیده می‌شود. روابط (1-5) و (1-31) همراه با این ترکیب تنش به هشت رابطه مثل حالت کرنش صفحه‌ای تقلیل می‌یابند. روابط تعادل (4-4) و شرایط مرزی (4-5) برای حالت تنش صفحه‌ای نیز صادق هستند.

با قرار دادن روابط (4-8) در روابط (4-3)، روابط تنش ـ کرنش درحالت تنش صفحه‌ای به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{4-9}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

و

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad , \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{a}$$

در حالت تنش صفحه‌ای $\varepsilon_z$ مستقلاً از رابطهٔ (a) به دست می‌آید، و سپس w از رابطهٔ $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ محاسبه می‌شود. در نتیجه در روابط حاکم فقط u و v باقی می‌مانند.

حال روابط حاکم در حالت تنش صفحه‌ای، مثل حالت کرنش صفحه‌ای، سه رابطه برحسب مؤلفه‌های تنش تقلیل می‌یابد. چون روابط (4-1) برای هر دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای صادق است، رابطهٔ سازش (4-6) نیز برای هر دو حالت برقرار می‌باشد. با جایگذاری تنش‌ها وکرنش‌ها از رابطهٔ (4-9) و استفاده از روابط تعادل (4-4)، رابطهٔ سازش برحسب تنش‌های نرمال به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma x + \sigma y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y}\right) \tag{4-10}$$

این رابطه همراه با روابط تعادل، شکل مناسبی از روابط حاکم برای حالت تنش صفحه‌ای را به دست می‌دهد. بطور کلی در حالت‌های دومحوری بررسی شده، روابط

تعادل [ روابط (4-4)] ، همراه با روابط سازش [رابطهٔ (7-4) برای کرنش صفحه‌ای و (10-4) برای تنش صفحه‌ای] و شرایط مرزی [روابط (5-4)] ، برای تعیین توزیع کامل تنش در جسم کافی خواهند بود. می‌توان نشان داد که فقط یک جواب برای هر مسأله به دست می‌آید که بتواند این شرایط را ارضاء نماید.[1] به عبارت دیگر برای هر مسأله فقط یک حل وجود دارد.

در حالتهائی که نیروهای حجمی وجود ندارند و یا ثابت هستند، روابط سازش برای دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای یکسان می‌شود. در این حالت‌ها، توزیع تنش بدست آمده شامل ثابت‌های الاستیک نخواهند بود. در نتیجه اگر دو میله فولادی و Lucite شکل هندسی یکسانی داشته باشند و بارگذاری روی آنها نیز یکسان باشد، توزیع تنش در آنها مشابه خواهد بود. با استفاده از این خاصیت می‌توان درمسائلی مثل مطالعات فوتوالاستیک به‌جای جسم اصلی، یک جسم ایزوتروپیک مناسب جایگزین کرد.

با مقایسه روابط (4-3b) و (9-4) می‌توان جدول (1-4) را برای تبدیل حالت کرنش صفحه‌ای به تنش صفحه‌ای و برعکس تنظیم نمود.

| Solution | To convert to | $E$ is replaced by | $\nu$ is replaced by |
|---|---|---|---|
| Plane stress | Plane strain | $\dfrac{E}{1-\nu^2}$ | $\dfrac{\nu}{1-\nu}$ |
| Plane strain | Plane stress | $\dfrac{1+2\nu}{(1+\nu)^2}E$ | $\dfrac{\nu}{1+\nu}$ |

جدول (1-4)

۱-رجوع شود به؛

I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, New York, McGraw- Hill, 1056.



## 4-4 تابع تنش [1]

در قسمت قبل نشان داده شد که برای حل مسائل دومحوری در الاستیسیته لازم است. روابط تعادل [روابط (4-4)] ، همراه با روابط سازش [رابطهٔ (7-4) یا (10-4)] و شرایط مرزی [روابط (5-4)] حل شوند. وقتی نیروهای حجمی $F_x$ و $F_y$ قابل صرفنظر کردن هستند، این روابط به صورت روابط ساده زیر درمی‌آیند؛

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial_x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_y} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial_y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial_x} = 0 \tag{a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{b}$$

شرایط مرزی همان روابط (5-4) خواهد بود. تابع تنش $\phi(x,y)$ طوری انتخاب می‌شود که اگر تنش‌ها به صورت زیر به آن وابسته باشند، روابط تعادل ارضاء شود؛

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\ ,\quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ ,\quad \tau_{xy} = \frac{-\partial^2\phi}{\partial_x\partial_y} \tag{4-11}$$

این تابع توسط G.B.Airy معرفی شد.

با قرار دادن تنش‌ها از رابطهٔ (11-4) در رابطهٔ (b) نتیجه می‌شود؛

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = \nabla^4\phi = 0 \tag{4-12}$$

باتوجه به این رابطه حل مسائل دومحوری عبارت می‌شود از انتخاب تابع $\phi$ به طوری که در رابطه (12-4) صادق باشد. پس از انتخاب تابع، تنش‌ها از روابط (11-4) به دست آمده و سپس با استفاده از روابط تنش ـ کرنش، کرنش‌ها محاسبه خواهند شد. با محاسبه کرنش‌ها، مؤلفه‌های تغییر مکان بدست می‌آیند. واضح است که حل کامل مسأله باید همراه با ارضاء شرایط مرزی باشد.

1- The stress function

باید توجه داشت که درحالت تنش صفحه‌ای، $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ بوده و $\sigma_x$،$\sigma_y$،$\tau_{xy}$ مستقل از z می‌باشند. در نتیجه $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$، $\varepsilon_x$، $\varepsilon_y$، $\varepsilon_z$، $\gamma_{xy}$ مستقل از z خواهند بود. در این صورت با مراجعه به روابط (2-8)، دیده می‌شود که علاوه بر رابطه (4-12)، روابط سازش زیر نیز باید برقرار باشد؛

$$\frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon z}{\partial x \partial y} = 0 \tag{c}$$

واضح است که این شرایط اضافی با حل فقط رابطه (4-12)، درحالت تنش صفحه‌ای ارضاء نخواهند شد. بنابراین حل فوق برای مسائل تنش صفحه‌ای یک حل تقریبی است. بهرحال نشان داده می‌شود که در ورقهای نازک، میزان خطا بسیار کم است، و راه حل فوق نتایج قابل قبولی به دست می‌دهد.

## 4-5 روشهای حل مسائل دومحوری

حل مستقیم روابط بدست آمده در الاستیسیته دومحوری مشکل است و معمولاً از روشهای معکوس یا نیمه معکوس استفاده می‌شود. در روش معکوس ابتدا حلی فرض شده و سپس کنترل می‌شود که آیا روابط حاکم و شرایط مرزی ارضاء می‌شود یا خیر. در روش نیمه معکوس قسمتی از مسأله، با بیان عبارتی برای تنش، کرنش، تغییر مکان، یا تابع تنش برحسب ثابتهای مجهول، فرض شود. پس از آن با استفاده از روابط حاکم و شرایط مرزی ثابتها محاسبه می‌گردند. بیان یک عبارت مناسب بستگی به مسأله مورد نظر دارد.

تعدادی از مسائل دومحوری باانتخاب یک تابع دوجمله‌ای از x و y برای تابع تنش قابل حل است. تابع دوجمله‌ای انتخاب شده باید در رابطهٔ بی‌هارمونیک (4-12) صادق بوده، وبرای اینکه تنش‌ها از رابطهٔ (4-11) جواب داشته باشند ازدرجهٔ دو و بالاتر باشد. از سری فوریه نیز برای حل برخی مسائل دومحوری می‌توان استفاده کرد.(1)

۱- رجوع شود به؛

S. Timoshenko and J. Goodier, "Theory of Elasticity", New York McGraw-Hill, 1970.



## توابع دوجمله‌ای

یک روش مقدماتی برای حل مسائل دومحوری ازطریق توابع دوجمله‌ای بدینصورت است که توابع مختلف دوجمله‌ای انتخاب شده، و ضرایب مجهول آن طوری محاسبه شود که $\nabla^4\phi = 0$ گردد. بحث مختصری از این روش در این قسمت آورده می‌شود.

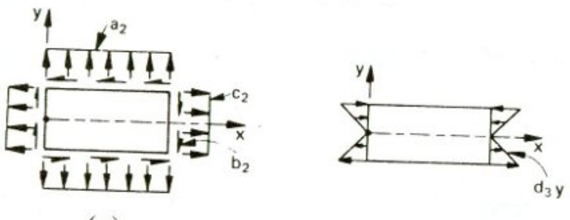
یک تابع دوجمله‌ای درجه دو به صورت زیر است؛

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2 \tag{4-13}$$

این تابع در رابطهٔ (4-12) صادق است. تنش‌های بدست آمده از این رابطه عبارتند از؛

$$\sigma_x = c_2 \quad , \quad \sigma_y = a_2 \quad , \quad \tau_{xy} = -b_2$$

هر سه مؤلفه تنش در جسم مقادیر ثابتی هستند. برای یک ورق چهارگوش، شکل (4-4a)، واضح است که این نتایج می‌توانند نشان دهنده کشش ساده ($c_2 \neq 0$)، کشش دومحوری ($c \neq 0$ , $a_2 \neq 0$)، یا برش خالص ($b_2 \neq 0$) باشد.




(a) (b)

شکل (4-4)

تابع دوجمله‌ای درجهٔ سه زیر نیز رابطهٔ (4-12) را ارضاء می‌کند؛

$$\phi_3 = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3 \qquad (4\text{-}14)$$

تنش‌های حاصل از این رابطه برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_x = c_3x + d_3y \quad , \quad \sigma_y = a_3x + b_3y \quad , \quad \tau_{xy} = - b_3x - c_3y$$

برای حالت $a_3 = b_3 = c_3 = 0$، تنش‌ها به صورت ساده زیر درمی‌آیند؛

$$\sigma_x = d_3y \quad , \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

که نشان دهنده خمش خالص در ورق چهارگوش است، شکل (4-4b).
دوجمله‌ای درجه چهار به صورت زیر؛

$$\phi_4 = \frac{a_4}{12} x^4 + \frac{b_4}{6} x^3y + \frac{c_4}{2} x^2y^2 + \frac{d_4}{6} xy^3 + \frac{e_4}{12} y^4 \qquad (4\text{-}15)$$

به شرطی در رابطهٔ (4-12) صادق است که؛

$$e_4 = - (2c_4 + a_4)$$

باشد. تنش‌های حاصل از رابطهٔ (4-15) عبارت خواهد شد از؛

$$\sigma_x = c_4x^2 + d_4xy - (2c_4 + a_4)\, y^2$$

$$\sigma_y = a_4x^2 + b_4xy + c_4y^2$$

$$\tau_{xy} = - \frac{b_4}{2} x^2 - 2c^4xy - \frac{d_4}{2} y^2$$

دوجمله‌ای درجه پنج به صورت زیر؛

$$\phi_5 = \frac{a_5}{20} x^5 + \frac{b_5}{12} x^4y + \frac{c_5}{6} x^3y^2 + \frac{d_5}{6} x^2y^3 + \frac{e_5}{12} xy^4 + \frac{f_5}{20} y^5 \qquad (4\text{-}16)$$

به شرطی رابطهٔ (4-12) را ارضاء می‌کند که شرط زیر برقرار باشد؛



$$(3a_5 + 2c_5 + e_5)\, x + (b_5 + 2d_5 + 3f_5)\, y = 0$$

از این رابطه نتیجه می‌شود؛

$$e_5 = -3a_5 - 2c_5 \quad , \quad b_5 = -2d_5 - 3f_5$$

مؤلفه‌های تنش در این حالت برابر می‌شوند با؛

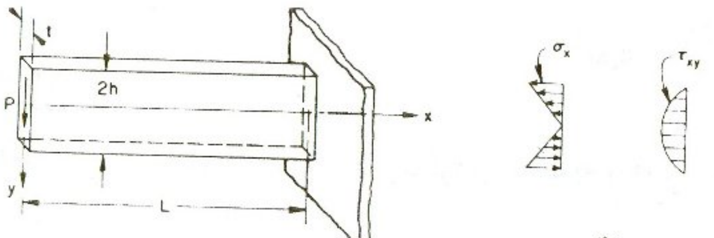
$$\sigma_x = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5x^2y - (3a_5 + 2c_5)\, xy^2 + f_5y^3$$

$$\sigma_y = a_5x^3 - (3f_5 + 2d_5)\, x^2y + c_5xy^2 + \frac{d_5}{3} y^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3} (3f_5 + 2d_5)\, x^3 - c_5x^2y - d_5xy^2 + \frac{1}{3} (3d_5 + 2c_5)\, y^3$$

## مثال 4-1

یک تیر نازک کنسول مطابق شکل (4-5a) تحت بار P در انتهای آزاد قرار دارد. توزیع تنش در تیر را به دست آورید. سطح مقطع تیر چهارگوش و ثابت است و از وزن آن صرفنظر نمائید.




(a) (b)

شکل (4-5)

حل ـ اگر ضخامت t در این تیر نسبت به 2h کوچک باشد، حالت تنش را می‌توان تنش

صفحه‌ای فرض کرد. باتوجه به سیستم محورهای انتخاب شده در شکل (4-5a)، شرایط مرزی عبارتند از؛

$$y = \pm h \qquad y = \pm h$$
$$\tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_y = 0$$

این شرایط مرزی بیان می‌کند که در لبه‌های بالا وپائین تیر تنش‌های $\sigma_y$ و $\tau_{xy}$ صفر می‌باشند. علاوه بر شرط (a) تنش $\sigma_x$ نیز در $x = 0$ باید صفر شود.

شرط تعادل نیروی خارجی P و منتجه نیروهای برشی در سطح انتهای آزاد تیر نیز باید برقرار باشد. به عبارت دیگر؛

$$P = -\int_{-h}^{+h} \tau_{xy}\, t\, dy \tag{b}$$

برای بدست آوردن توزیع تنش در تیر، از سه روش مسأله تحلیل می‌شود.

## روش 1

باتوجه به اینکه ممان خمشی نسبت به x به صورت خطی تغییر می‌کند؛ و $\sigma_y$ در هر مقطع به y بستگی دارد، می‌توان $\sigma_x$ را به صورت زیر فرض کرد؛

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 xy \tag{c}$$

که در آن $c_1$ مقدار ثابتی است. با دو مرتبه انتگرال گرفتن نسبت به y، $\phi$ برابر می‌شود با؛

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 xy^3 + y f_1(x) + f_2(x) \tag{d}$$

که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی از x هستند، و باید پیدا شوند. با قرار دادن تابع $\phi$ در رابطهٔ (4-12) نتیجه خواهد شد؛

$$y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$



چون ترم دوم این عبارت مستقل از y است، برای اینکه این رابطه به ازاء تمام مقادیر x و y برقرار باشد، $\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0$ و $\frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$ خواهد بود. پس از انتگرال‌گیری این دو تابع به صورت زیر بدست می‌آیند؛

$$f_1(x) = c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$$
$$f_2(x) = c_6x^3 + c_4x^2 + c_8x + c_9$$

که در آن $c_2$ تا $c_9$ مقادیر ثابتی هستند. با قرار دادن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در رابطهٔ (d) نتیجه می‌شود؛

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 xy^3 + (c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5)\, y + (c_6x^3 + c_7x^2 + c_8x + c_9)$$

با داشتن تابع تنش، تنش‌های $\sigma_y$ و $\tau_{xy}$ از رابطهٔ (4-11) برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6\,(c_2y + c_6)\, x + 2\,(c_3y + c_7)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} c_1 x^2 - 3c_2x^2 - 2c_3x - c_4 \tag{e}$$

حال باید از شرایط مرزی برای بدست آوردن ثابتها استفاده کرد. با قرار دادن روابط (a) در (e) نتیجه خواهد شد؛

$$c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = 0 \quad , \quad c_4 = -\frac{1}{2} c_1 h^2$$

بااستفاده از شرط (b)؛

$$-\int_{-h}^{+h} \tau_{xy}\, t\, dy = \int_{-h}^{+h} \frac{1}{2} c_1 t\, (y^2 - h^2)\, dy = P$$

$c_1$ برابر می‌شود با؛

$$c_1 = -\frac{3P}{2th^3} = -\frac{P}{I}$$

که در آن $I = \frac{2}{3} th^3$ ممان اینرسی مقطع حول محور خمشی می‌باشد.

از روابط (c) و (e)، با داشتن ثابتهای فوق، مؤلفه‌های تنش برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I} \quad , \quad \sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I}\,(h^2 - y^2) \tag{4-17}$$

توزیع این تنش در مقطعی دور از انتهای آزاد در شکل (4-5b) نشان داده شده است.

## روش 2

باتوجه به ممان خمشی $M_z=Px$ ، توزیع تنش را می‌توان مشابه حالت خمش خالص به صورت زیر فرض کرد؛

$$\sigma_x = -\left(\frac{Px}{I}\right) y \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y) \quad , \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad (f)$$

این مقادیر روابط سازش را ارضاء می‌نمایند. باتوجه به رابطهٔ (f) ، روابط تعادل به صورت زیر درمی‌آیند؛

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (g)$$

رابطهٔ دوم (g) نشان می‌دهد که $\tau_{xy}$ فقط به y بستگی دارد. از رابطهٔ اول (g) و رابطهٔ (f) نتیجه می‌شود؛

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = + \frac{Py}{I}$$

و

$$\tau_{xy} = + \frac{Py^2}{2I} + c$$

ثابت c از شرط مرزی $(\tau_{xy})_{y=\pm h} = 0$ برابر می‌شود با؛

$$c = - Ph^2/2I$$

با قراردادن مقدار c در عبارت $\tau_{xy}$، همان نتیجه روش 1- بدست می‌آید. نتیجه بدست آمده شرط (b) را نیز ارضاء می‌کند.

## روش 3

مسأله را می‌توان با جمع کردن توابع $\phi_2$ و $\phi_4$ و با شرط زیر حل کرد؛

$$a_2 = c_2 = a_4 = b_4 = c_4 = e_4 = 0$$

در نتیجه تابع تنش برابر می‌شود با؛

$$\phi = \phi_2 + \phi_4 = b_2xy + \frac{d_4}{6} cy^3$$



مؤلفه‌های تنش از این تابع برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_x = d_4xy \quad , \quad \sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = - b_2 - \frac{d_4}{2} y^2$$

باتوجه به این مؤلفه‌های تنش شرط دوم روابط (a) ارضاء می‌شود، و از شرط اول نتیجه می‌شود؛

$$d^4 = -2b_2/h^2$$

در نتیجه؛

$$\tau_{xy} = - b_2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

با قرار دادن $\tau_{xy}$ در شرط (b)؛ $b_2$ برابر؛

$$b_2 = - 3P/4ht = Ph^2/2I$$

می‌شود و همان نتایج قبلی بدست می‌آید.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که تنش‌های بدست آمده با روش مقاومت مصالح صحیح است. اگر شرایط مرزی، و نوع بارگذاری، طبق توزیع شکل (4-5b) باشد جوابها دقیق است. در غیر اینصورت در محدوده مرز، جوابها دقیق نیست، ولی باتوجه به اصل سنت و نانت برای مقاطع دور از دو انتها جوابها دقیق خواهد بود. در بخش پنجم، قسمت (5-4) روابط تغییر مکان بدست خواهد آمد.

## 4-6 روابط پایه در سیستم محورهای قطبی

در بسیاری از مسائل مهندسی استفاده از سیستم محورهای قطبی به جای سیستم کارتزین حل مسائل را ساده‌تر می‌کند. بطور کلی در مسائل متقارن محوری مثل استوانه، دیسک، تیر خمیده و سوراخی در ورق بهتراست ازسیستم محورهای‌قطبی‌استفاده شود. سیستم محورهای قطبی $(r,\theta)$ و سیستم کارتزین $(x,y)$ با روابط زیر بهم وابسته‌اند؛

$$x = r \cos\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$\qquad (a)$$
$$y = r \sin\theta \qquad \theta = tg^{-1} \frac{y}{x}$$

روابط تعادل؛

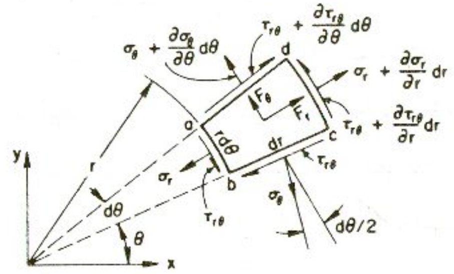
المان abcd به ضخامت واحد در سیستم محورهای قطبی در نظر گرفته می‌شود،

شکل (4-6). نیروهای حجمی در امتدادهای r و $\theta$ به ترتیب Fr و F$\theta$ هستند. از تعادل المان در جهت شعاعی نتیجه می‌شود؛

$$(\sigma r + \frac{\partial \sigma r}{\partial r} dr)\ ( r + dr)\ d\theta - \sigma_r r d\theta - (\sigma\theta + \frac{\partial \sigma\theta}{\partial \theta} dr\ Sin\ \frac{d\theta}{2}$$

$$\sigma\theta dr\ Sin\ \frac{d\theta}{2} + (\tau r\theta + \frac{\partial \tau r\theta}{\partial \theta} d\theta)\ drCos\ \frac{d\theta}{2} - \tau_r\theta\ drCos\ \frac{d\theta}{2}$$

$$+ F_r rdrd\theta = 0$$



شکل (4-6)

چون $d\theta$ کوچک است، به جای $Sin\ \frac{d\theta}{2}$ می‌توان $\frac{d\theta}{2}$ و به جای $Cos\ \frac{d\theta}{2}$، 1 قرار داد. ضمناً با صرفنظر کردن از ترمهای با درجات بالاتر عبارت ساده‌تر خواهد شد. تحلیل مشابهی برای تعادل در جهت $\theta$ می‌توان ارائه داد. وقتی هر دو رابطه تعادل به $rdrd\theta$ تقسیم شوند نتیجه خواهد شد؛

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau r\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma r - \sigma\theta}{r} + Fr = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau r\theta}{\partial r} + \frac{2\tau r\theta}{r} + F\theta = 0 \end{cases} \tag{4-18}$$



در صورتیکه نیروهای حجمی وجود نداشته باشند، اگر تنش‌ها با تابع تنش $\phi\ (r,\theta)$ به صورت زیر وابسته باشند، رابطهٔ (4-18) ارضاء خواهد شد؛

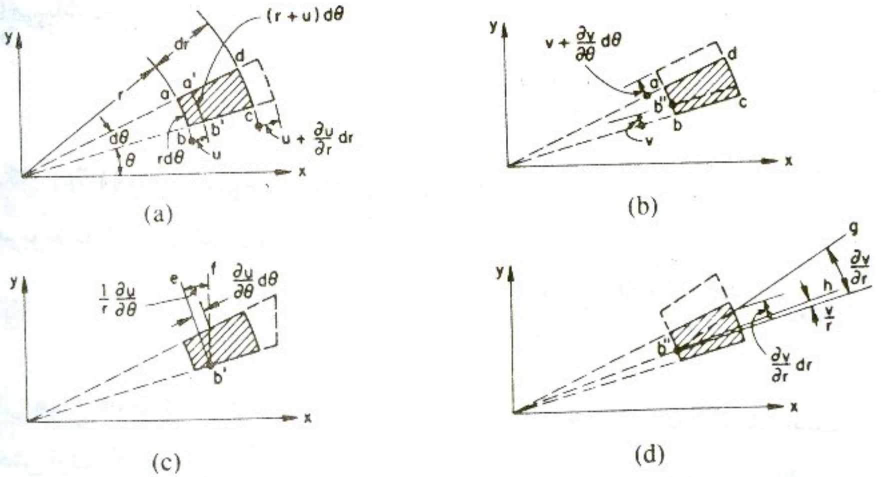
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \tag{4-19}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r}\left( \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

## روابط کرنش ـ تغییر مکان

المان کوچک abcd را در نظر گرفته و تغییر مکانها در جهت‌های r و $\theta$، u و v فرض می‌شود. تغییر شکل کلی المان ترکیبی از: 1ـ تغییر طول اضلاع المان طبق شکلهای (4-7a) و b و 2- چرخش اضلاع طبق شکلهای (4-7c) و d می‌باشد.



شکل (4-7)

در تحلیل زیر باتوجه به کوچک بودن زاویه، $\sin\theta \approx \theta$ و قوسهای ab و cd به صورت خط‌های مستقیم در نظر گرفته می‌شوند. باتوجه به شکل (4-7a) دیده می‌شود که در اثر تغییر مکان u ضلع ab، هر دو کرنش شعاعی و محیطی ایجاد می‌شود. کرنش شعاعی $\varepsilon r$، تغییر طول واحد طول ضلع ad، فقط وابسته به تغییر مکان u به صورت زیر خواهد بود؛

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{4-20a}$$

کرنش زاویه‌ای در اثر u، تغییر طول واحد طول ab، برابر می‌شود با؛

$$(\varepsilon_\theta)_u = \frac{(r+u)\, d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} \tag{b}$$

از شکل (4-7b) دیده می‌شود که در اثر تغییر مکان u نیز $\varepsilon\theta$ به صورت زیر وجود خواهد داشت؛

$$(\varepsilon_\theta)_v = \frac{(\partial v/\partial\theta)\, d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{c}$$

این کرنش در اثر تغییر طول ab به اندازه $\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta$ است. کرنش محیطی کلی جمع روابط (b) و (c) می‌باشد؛

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \tag{4-20b}$$

در شکل (4-7c) زاویه چرخش eb′f از ضلع a′b′ نشان داده شده است. کرنش زاویه‌ای مربوط به آن برابر است با؛

$$(\gamma_{r\theta})_u = \frac{(\partial u/\partial\theta)\, d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{d}$$

چرخش ضلع bc فقط در اثر تغییر مکان v در شکل (4-7d) نشان داده شده است. چون چرخش اولیه b″ به اندازهٔ $\frac{u}{v}$ اتفاق افتاده است، چرخش نسبی gb″h از ضلع bc برابر می‌شود با؛

$$(\gamma_{r\theta})_v = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \tag{e}$$



جمع روابط (d) و (e) کرنش زاویه‌ای کلی را بدست می‌دهد. این کرنش برابر خواهد شد با؛

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \tag{4-20c}$$

بدین ترتیب روابط کرنش ـ تغییرمکان در سیستم محورهای قطبی به صورت روابط (4-20) خواهد بود.

## روابط هوک

با کوچک فرض کردن المان، روابط تنش ـ کرنش در سیستم محورهای قطبی مشابه سیستم محورهای قائم خواهد بود. فقط کافیست زیرنویس x به r و y به $\theta$ تبدیل شود. در حالت تنش صفحه‌ای، رابطهٔ (4-9) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma r - \nu\sigma\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma\theta - \nu\sigma r) \tag{4-21a}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

برای کرنش صفحه‌ای، از رابطهٔ (4-3) نتیجه می‌شود؛

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\,\sigma r - \nu\sigma\theta]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\,\sigma\theta - \nu\sigma r] \tag{4-21b}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

## روابط انتقال

با جایگزین کردن زیرنویس x′ به r و y′ به $\theta$ در روابط انتقال قسمت 1-5 نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_r = \sigma_x \, Cos^2\theta + \sigma_y Sin^2\theta + 2\tau_{xy} \, Sin\theta Cos\theta$$

$$\tau_{r\theta} = (\sigma \, y - \sigma \, x) \, Sin\theta \, Cos\theta + \tau_{xy} \, (Cos^2\theta - Sin^2\theta) \tag{4-22a}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \, Sin^2\theta + \sigma \, y \, Cos^2\theta - 2\tau_{xy} \, Sin\theta \, Cos\theta$$

ضمناً می‌توان تنش‌های $\sigma_x$، $\tau_{xy}$ و $\sigma_y$ را برحسب تنش‌های $\sigma_r$، $\tau_r\theta$ و $\sigma_\theta$ به صورت زیر نوشت؛

$$\sigma_x = \sigma r \, Cos^2\theta + \sigma\theta Sin^2\theta - 2\tau_{r\theta} \, Sin\theta Cos\theta$$

$$\tau_{xy} = (\sigma r - \sigma\theta) \, Sin\theta \, Cos\theta + \tau_{r\theta} \, (Cos^2\theta - Sin^2\theta) \tag{4-22b}$$

$$\sigma_y = \sigma r \, Sin^2\theta + \sigma\theta Cos^2\theta + 2\tau_{r\theta} \, Sin\theta Cos\theta$$

روابط مشابهی برای انتقال کرنش‌های $\varepsilon_r$، $\gamma_{r\theta}$ و $\varepsilon_\theta$ می‌توان نوشت.

## رابطه سازش

از روابط (4-20) می‌توان نشان داد که رابطهٔ سازش به صورت زیر است؛

$$\frac{\partial^2 \varepsilon\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon r}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \gamma r\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \gamma r\theta}{\partial \theta} \tag{4-23}$$

برای بدست آوردن رابطه سازش برحسب تابع تنش $\phi$، لازم است مشتقات نسبی $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ برحسب r و $\theta$ با استفاده از رابطهٔ (a) محاسبه شوند. این مشتقات بـه اپراتـور لاپلاسین زیر منجر خواهد شد؛

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \tag{f}$$



بدین ترتیب شرط تابع تنش (4-12) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\nabla^4\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(\nabla^2\phi) = 0 \tag{4-24}$$

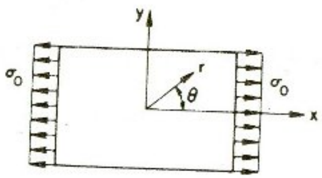
برای حالت متقارن محوری در صورت صفر بودن نیروهای حجمی، رابطهٔ سازش (4-7) با استفاده از رابطهٔ (f) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\nabla^4\phi\,(\sigma r + \sigma\theta) = \frac{d^2\,(\sigma r + \sigma\theta)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,(\sigma r + \sigma\theta)}{dr} = 0 \tag{4-25}$$

سایر روابط الاستیسیته دومحوری به روش فوق می‌تواند به دست آید.

### مثال 4-2

یک ورق نازک و بزرگ تحت تنش کششی یکنواخت $\sigma_0$ در دو انتها قرار دارد، شکل (4-8). میدان تنش در ورق را پیدا کنید.




شکل (4-8)

برای تحلیل این مسأله بهتر است مرکز مختصات وسط ورق در نظر گرفته می‌شود.

حالت تنش در ورق به صورت زیر است؛

$$\sigma_x = \sigma_\circ \qquad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$\nabla^4 \varphi = 0$

تابع تنش $\phi = \sigma_\circ\, y^2/2$ رابطهٔ (4-12) را ارضاء می‌کند. در این مسأله بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود. بدین منظور تابع تنش در سیستم محورهای قطبی با قرار دادن $y = r\sin\theta$ به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\phi = \frac{1}{4}\sigma_\circ r^2 (1 - \cos 2\theta) \tag{g}$$

تنش‌ها در ورق باتوجه به تابع تنش (g) از روابط (4-19) برابر می‌شوند با؛

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_\circ (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\circ (1 + \cos 2\theta) \tag{4-26}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_\circ \sin 2\theta$$

## 4-7 توزیع تنش در گوه نازک

در شکلهای (4-9a) و b گوه کنسولی تحت دو نوع بارگذاری نشان داده شده‌اند. ضخامت گوه‌ها واحد فرض شده، و در هر دو حالت نیرو به صورت یکنواخت در ضخامت گوه گسترده شده است. برای بدست آوردن توزیع تنش در این دوگوه، تحلیل جداگانه‌ای برای هرکدام در ذیل آورده شده است.

برای حالت (4-9a) تابع تنش به صورت زیر فرض می‌شود؛

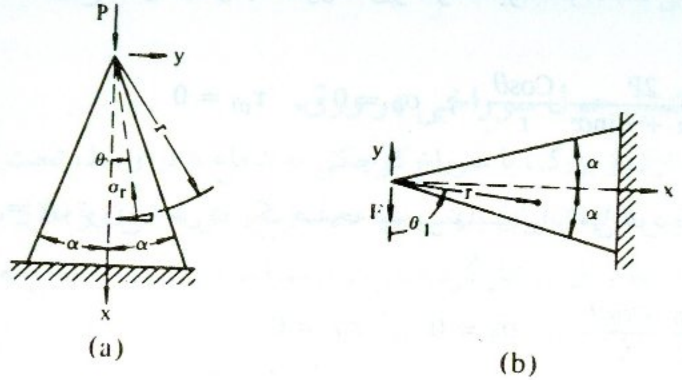
$$\phi = cPr\theta\sin\theta \tag{a}$$

که در آن c مقدار ثابتی است. رابطهٔ (a) رابطهٔ (4-12) و سازش را ارضاء می‌کند.

$\nabla^4 \varphi = 0$

تنش‌ها در گوه از رابطهٔ (4-19) برابر می‌شوند با؛






شکل (4-9)

$$\sigma_r = 2cP\frac{\cos\theta}{r}\ , \quad \sigma_\theta = 0\ , \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{b}$$

باتوجه به شکل، شرایط مرزی عبارتند از؛

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \qquad (\theta = \pm\alpha) \tag{c}$$

$$2\int_0^\alpha \sigma_r\, r\cos\theta d\theta = -P \tag{d}$$

شرط (c) از نتایج $\sigma_\theta$ و $\tau_{r\theta}$ طبق رابطهٔ (b) برقرار است. با قراردادن $\sigma_r$ از رابطهٔ (b) در شرط (d) نتیجه می‌شود؛

$$4cP\int_0^\alpha \cos^2\theta d\theta = -P$$

و در نتیجه؛

$$c = \frac{1}{2\alpha + \mathrm{Sin}2\alpha} \qquad \text{(e)}$$

با بدست آوردن c توزیع تنش در گوه به صورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{(4-27a)}$$

با قرار دادن $\alpha = \frac{\pi}{2}$، توزیع تنش در یک صفحه نیم بی‌نهایت برابر می‌شود با؛

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{(4-27b)}$$

برای حالت (4-9b) تابع تنش به صورت زیر فرض می‌شود؛

$$\phi = cFr\theta_1 \mathrm{Sin}\theta_1 \qquad \text{(f)}$$

شرط تعادل در این حالت به صورت زیر خواهد بود؛

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sigma_r \, r\mathrm{Cos}\theta_1 \, d\theta_1 = 2cF \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \mathrm{Cos}^2\theta_1 \, d\theta_1 = F$$

که از آن ثابت c برابر می‌شود با؛

$$c = \frac{1}{2\alpha - \mathrm{Sin}2\alpha} \qquad \text{(g)}$$

در نتیجه توزیع تنش در گوه به صورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_r = \frac{2F}{2\alpha - \mathrm{Sin}2\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta_1}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{(4-27c)}$$

اگر به گوه هر دو بار بطور همزمان وارد آید، توزیع تنش با ترکیب این دو حالت برابر می‌شود با؛

(4-27d)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}2\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} + \frac{2F}{2\alpha - \mathrm{Sin}2\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta_1}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0$$

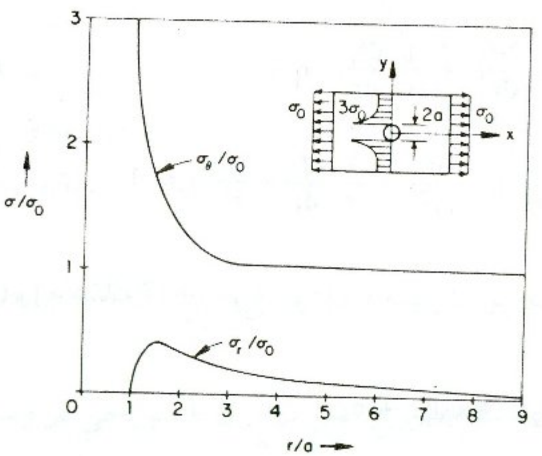


نتایج بدست آمده (27-4) در گوه وقتی دقیق است که عکس‌العمل انتهای گیردار با نتایج هم‌آهنگی داشته باشد.

## 4-8 توزیع تنش حول سوراخی در ورق

یک ورق نازک و بزرگ، با سوراخ کوچکی به شعاع a در وسط، تحت کشش ساده قرار دارد، شکل (10-4)، برای بدست آوردن توزیع تنش در ورق و حول سوراخ، مبدأ مختصات در وسط ورق در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی دور سوراخ به صورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \qquad (r=a) \qquad \text{(a)}$$




شکل (10-4)

در فاصله‌ای دور از مبدأ تنش‌های $\sigma_r$، $\sigma_\theta$ و $\tau_{r\theta}$ را می‌توان از نتایج مثال (2-4) بدست

آورد. در نتیجه برای $r = \infty$، باتوجه به رابطهٔ (4-26) نتیجه خواهد شد؛

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_\circ\,(1+\mathrm{Cos}2\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\circ\,(1-\mathrm{Cos}2\theta) \tag{b}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_\circ\,\mathrm{Sin}2\theta$$

برای حالت فوق تابع تنشی مشابه تابع (g) مثال (4-2) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود؛

$$\phi = f_1(r) + f_2(r)\,\mathrm{Cos}2\theta \tag{c}$$

که در آن $f_1$ و $f_2$ باید محاسبه شوند. با قراردادن رابطه (c) در رابطهٔ بی‌هارمونیک (4-24)، و باتوجه به اینکه این رابطه باید برای تمام مقادیر $\theta$ صادق باشد، نتیجه خواهد شد؛

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_1}{dr}\right) = 0 \tag{d}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_2}{dr} - \frac{4f_2}{r^2}\right) = 0 \tag{e}$$

حل روابط (d) و (e)، [به مسأله 4-17 رجوع شود]، به صورت زیر خواهد بود؛

$$f_1 = c_1r^2\,l_nr + c_2r^2 + c_3l_nr + c_4 \tag{f}$$

$$f_2 = c_5r^2 + c_6r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8 \tag{g}$$

که در آن $c_1$ تا $c_8$ ثابتهای انتگرال هستند. با قرار دادن روابط (f) و (g) در رابطهٔ (c) تابع تنش $\phi$ بدست می‌آید. از رابطه (4-19) تنش‌ها برابر خواهند شد با؛



$$\sigma_r = c_1\,(1+2l_nr) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left(2c_5 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2}\right)\mathrm{Cos}2\theta$$

$$\sigma_\theta = c_1\,(3+2l_nr) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} + \left(2c_5 + 12c_6r^2 + \frac{6c_7}{r^4}\right)\mathrm{Cos}2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \left(2c_5 + 6c_6r^2 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_8}{r^2}\right)\mathrm{Sin}2\theta$$

ثابت $c_4$ در تنش‌ها وجود ندارد و نشان می‌دهد که تاثیری در توزیع‌ها نخواهد داشت. باتوجه به شرط مرزی (b)، چون در $r = \infty$ تنش‌ها باید مقادیر معینی داشته باشند، $c_1 = c_6 = 0$ خواهد شد. از طرفی با استفاده از شرط مرزی (a) نتیجه می‌شود؛

$$2c_2 + \frac{c_3}{a^2} = 0 \quad , \quad 2c_5 + \frac{6c_7}{a^4} + \frac{4c_8}{a^2} = 0 \quad , \quad 2c_5 - \frac{6c_7}{a^4} - \frac{2c_8}{a^2} = 0$$

همچنین از شرط (b) نتیجه خواهد شد؛

$$\sigma_\circ = -4c_5 \quad , \quad \sigma_\circ = 4c_2$$

از حل این پنج رابطه ثابت‌ها به صورت زیر بدست خواهند آمد؛

$$c_2 = \sigma_\circ/4 \quad , \quad c_3 = -a^2\sigma_\circ/2 \quad , \quad c_5 = -\sigma_\circ/4$$

$$c_7 = -a^4\,\sigma_\circ/4 \quad , \quad c_8 = a^2\sigma_\circ/2$$

با قراردادن این ثابت‌ها،توزیع تنش در ورق با سوراخی در وسط به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_\circ\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1+\frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\mathrm{Cos}2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\circ\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\mathrm{Cos}2\theta\right] \tag{4-28}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_\circ \left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\mathrm{Sin}2\theta$$

تنش $\sigma_\theta$ در $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ بیشترین مقدار خود را دارا است و در r=a برابر است با؛

$$(\sigma_\theta)_{max} = 3\sigma_\circ$$

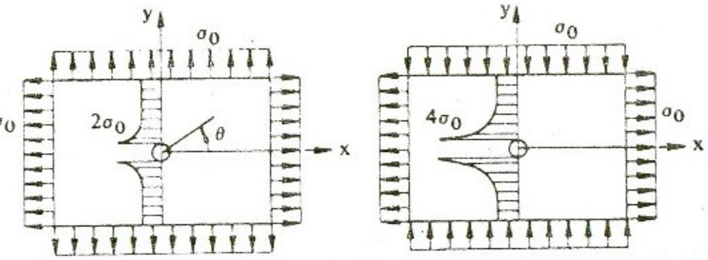
از طرف دیگر برای ورق بدون سوراخ، در $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ بیشترین مقدار $\sigma_\theta$ برابر؛

$$(\sigma_\theta)_{max} = \sigma_\circ$$

می‌باشد. بنابراین ضریب تمرکز تنش در سوراخ k=3 می‌باشد.

برای نشان دادن تغییرات $\sigma_r(r,\frac{\pi}{2})$ ، $\sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2})$ نسبت به فاصله از مرکز، تنش‌های بدون بعد نسبت به شعاع بدون بعد در شکل (4-10) ترسیم شده است. تنش برشی $\tau_{r\theta}(r,\frac{\pi}{2})$ صفر می‌باشد. در فاصله دو برابر قطر سوراخ، r=4a ، تنش $\sigma_\theta \approx 1.037\sigma_\theta$ و تنش $\sigma_r \approx 0.088\sigma_\theta$ است. در فاصله r=9a ، $\sigma_\theta \approx 1.066\sigma_\circ$ و $\sigma_r \approx 0.018\sigma_\circ$ می‌باشد. در نتیجه در این حالت در فاصله تقریباً 9a اثر سوراخ در تمرکز تنش از بین می‌رود. به عبارت دیگر تمرکز تنش اثر موضعی دارد، و این امر اصل سنت و نانت را تایید می‌کند.

از نتایج (4-28) می‌توان با استفاده از اصل جایگزینی برای حالتهای تنش دومحوری استفاده کرد. توزیع تنش $\sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2})$ برای دو حالت متفاوت تنش در شکل (4-11) نشان داده شده است.



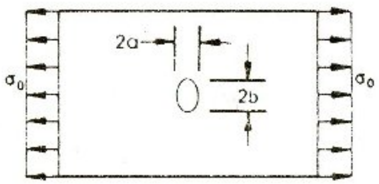

شکل (4-11)



در یک ورق نازک و بزرگ، با سوراخ بیضوی در وسط نیز تمرکز تنش وجود دارد، شکل (4-12). می‌توان نشان دادکه تنش کششی در دو انتهای محور بزرگتر سوراخ برابر است با؛

$$\sigma_{max} = \sigma_\circ\left(1+2\frac{b}{a}\right)$$

دیده می‌شودکه تنش ماکزیمم به نسبت $\frac{b}{a}$ بستگی دارد و در حد وقتی $a\to 0$ میل می‌کند، بیضی به صورت شکافی به طول 2b درمی‌آید. در این حالت تنش در دو انتهای شکاف بسیار زیاد می‌شود و جسم به حد تسلیم می‌رسد. در نتیجه شکاف شروع به توسعه می‌نماید. برای جلوگیری از توسعه شکاف می‌توان در دو انتها با مته سوراخهائی ایجاد کرد تا تمرکز تنش کمتر شود.




شکل (4-12)

## 4-9 تنش‌های حرارتی

اگر المانی مکعب شکل از جسمی تحت تغییرات درجه حرارت قرارگیرد، ابعاد آن منبسط یا منقبض می‌شود. اگر در مقابل تغییر ابعاد محدودیتی اعمال نشود، شکل کلی المان همواره به صورت مکعب باقی خواهد ماند.در این صورت هرچند در جسم کرنش وجود دارد، تنش‌ها برابر صفر هستند.اگر جسم طوری گرم شود که میدان درجه حرارت غیریکنواخت باشد، یا اگر میدان درجه حرارت یکنواخت باشد ولی از تغییر طول یک یا

چند بعد جسم جلوگیری شود، و یا اگر جسم رفتار غیر ایزوتروپی داشته باشد، تنش‌های حرارتی در جسم ایجاد می‌شود. این تنش‌ها در بسیاری از مسائل مهندسی، مثل صنایع هوائی و نیروگاههای حرارتی می‌تواند اثر قابل توجهی داشته باشد.

در حل مسائل همراه با تنش حرارتی، کرنش‌های مربوط به تنش و درجه حرارت با هم ترکیب می‌شوند، و باید در روابط تنش ـ کرنش تجدید نظر نمود اگر یک المان طولی کوچک به طول L تحت تغییر درجه حرارت T (x,y) قرار گیرد، تغییر طول آن برابر خواهد شد با؛

$$\delta L = \alpha LT$$

که در آن $\alpha$ عدد مثبتی است و ضریب انبساط حرارتی خطی نامیده می‌شود. در نتیجه در این حالت کرنش حرارتی $\varepsilon_t$ برابر می‌شود با؛

$$\varepsilon_t = \alpha T \qquad (4\text{-}29)$$

کرنش کلی $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ یک المان، با جمع کرنش حرارتی و کرنش ناشی از تنش بدست می‌آید؛

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T \qquad (4\text{-}30)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy/G}$$

چون انبساط آزاد حرارتی، در یک جسم ایزوتروپیک تغییرات زاویه‌ای ایجاد نمی‌کند، تغییر درجه حرارت اثری در کرنش زاویه‌ای نخواهد داشت. رابطهٔ (4-30) برای حالت تنش صفحه‌ای نوشته شده است، و برای حالت کرنش صفحه‌ای رابطهٔ مشابهی بدست می‌آید. معادلات دیفرانسیل تعادل، (4-4)، درمسائل ترموالاستیسیته بدون تغییر باقی می‌مانند. در مورد روابط کرنش ـ تغییر مکان، و روابط سازش نیز این امر صادق است. در نتیجه برای هر حالت خاص شرایط مرزی روابط ترموالاستیسیته و روابط الاستیسیته فقط در روابط تنش ـ کرنش اختلاف دارند.

با جایگذاری کرنش‌ها از روابط (4-30) در روابط سازش (4-6)، و با استفاده از رابطه



(4-4) و صرفنظر کردن از نیروهای حجمی، رابطهٔ سازش برحسب تنش به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \alpha ET) = 0 \qquad (4\text{-}31)$$

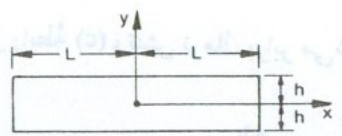
با استفاده از رابطهٔ (4-11)، شرط تابع تنش در این حالت به صورت زیر خواهد بود؛

$$\nabla^4\phi + \alpha E\nabla^2 T = 0 \qquad (4\text{-}32)$$

در صورت صرفنظر کردن از نیروهای حجمی، این رابطه برای هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای صادق است. در مسائل ترموالاستیسیته وقتی می‌توان از روش جایگزینی استفاده کرد که توزیع تنش یا کرنش اثر قابل توجهی در میدان درجه حرارت نداشته، و توزیع تنش نیز اثر قابل توجهی در خواص مکانیکی جسم نداشته باشد. در غیر اینصورت روابط کوپل شده و راه حل ریاضی مسأله نسبتاً پیچیده خواهد شد.

**مثال 4-3**

تیر نازکی با ضخامت t، ارتفاع 2h و طول 2L مطابق شکل (4-13) مفروض است. اگر تغییر درجه حرارت دلخواه $T = T(y)$ در جهت ارتفاع اتفاق افتد، تنش و کرنش ناشی از آن را پیدا کنید. فرض کنید تیر بدون بار است و نیروهای حجمی قابل صرفنظر کردن هستند.




شکل (4-13)

حل - شکل هندسی تیر نشان می‌دهد که مسأله حالت تنش صفحه‌ای است. فرض می‌شود حالت تنش در تیر به صورت زیر است؛

$$\sigma_x = \sigma_x(y) \quad , \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \tag{a}$$

با قرار دادن رابطه (a) در رابطه (4-4)، دیده می‌شود که رابطهٔ تعادل برقرار است. رابطهٔ سازش (4-31) باتوجه به رابطهٔ (a) به صورت زیر درمی‌آید؛

$$\frac{d^2}{dy^2}(\sigma_x + \alpha ET) = 0 \tag{b}$$

در نتیجه؛

$$\sigma_x = -\alpha ET + c_1 y + c_2 \tag{c}$$

که در آن $c_1$ و $c_2$ ثابتهای انتگرال هستند. شرط مرزی بدون بار بودن تیر در بعدهای $y = \pm L$ از رابطهٔ (b) برقرار است. شرط مرزی دیگر تیر بدینصورت است که نیروها و ممانهای دو انتهای $x = \pm L$ نیز باید صفر باشد. در نتیجه:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x \, t dy = 0 \quad , \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_x \, y t dy = 0 \tag{d}$$

با قرار دادن رابطهٔ (c) در روابط (d) ثابت‌ها برابر می‌شوند با؛

$$c_1 = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{+h} \alpha E T y \, dy$$

$$c_2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \alpha E T \cancel{y} \, dy$$

با قرار دادن این ثابتها در رابطهٔ (c)، تنش نرمال برابر می‌شود با؛

$$\sigma_x = E\alpha \left[ -T + \underbrace{\frac{t}{A} \int_{-h}^{+h} T dy}_{c_2} + \underbrace{\frac{yt}{I} \int_{-h}^{+h} T y \, dy}_{c_1} \right] \tag{4-33}$$



که در آن $A = 2th$ سطح مقطع تیر و $I = \frac{2h^3 t}{3}$ ممان اینرسی مقطع است. کرنش‌های مربوط به این تنش برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T \quad , \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \alpha T \quad , \quad \gamma_{xy} = 0 \tag{e}$$

تغییر مکانها را نیز می‌توان از روابط (4-1) بدست آورد.

از رابطهٔ (4-33) دیده می‌شود که همانطور که انتظار می‌رود، برای توزیع درجه حرارت ثابت تنش صفر است. واضح است که در این حالت با توجه به رابطهٔ (e) کرنش‌ها و در نتیجه تغییر مکانها صفر نخواهند بود. برای حالتی که درجه حرارت نسبته سطح میانی $(y=0)$ قرینه است، $T(y) = T(-y)$، انتگرال آخری در رابطهٔ (4-33) صفر می‌شود. همچنین برای حالت $T(y) = -T(-y)$ انتگرال اول رابطهٔ (4-33) صفر خواهد شد.