11-1 مقدمه (روابط پایه)؛

در عمل مسائل مهندسی زیادی وجود دارد، که در آنها توزیع تنش‌ها حول یک مح
متقارن می‌باشد. باید توجه داشت که این بیان در صورتی صحیح است که بارگذاری
نسبت به محور متقارن باشد. درنتیجه تحلیل این مسائل معمولاً تحت نام اعضاء تحت
متقارن محوری [1] انجام می‌گیرد. ازجمله این مسائل می‌توان، پوسته استوانه‌ای جد
ضخیم، و دیسک دوّار را نام برد.

یک ورق نازک و بزرگ، باسوراخ کوچک وتحت فشاریکنواخت مطابق شکل (1
درنظر گرفته می‌شود. باید توجه داشت که در امتداد محور باری وجود ندارد و درن
$\sigma_z = 0$ می‌باشد. در این حالت تنش‌ها حول محور z متقارن هستند و همچنین ت
مکانها نیز به θ بستگی نخواهند داشت. درضمن به علت تقارن تنش برشی $\tau_{r\theta}$ نیز
صفر باشد. دراینصورت رابطهٔ تعادل محورهای قطبی (18 -4) به صورت زیر خو
بود؛

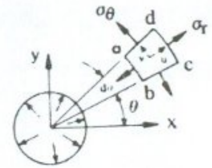
$$\ldots + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \qquad (11\text{-}1)$$

در این رابطه σ_θ تنش محیطی (مماسی)، σ_r تنش شعاعی، و F_r مؤلفه شعاعی نی
حجمی می‌باشد. درصورتی که نیروی حجمی صفر باشد، رابطهٔ (1 -11) بصورت
درمی آید؛

$$\ldots + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (11\text{-}2)$$

---

[1] ...symmetrically loaded members



شکل (11-1)

حال تغییر مکانهای شعاعی و محیطی بترتیب u و ν درنظر گرفته می شوند. باتوجه به تقارن، تغییرمکان محیطی وجود ندارد و به عبارت دیگر $\nu = 0$ است. دراینصورت یک نقطه، که در شکل با المان کوچک abcd مشخص شده است، فقط حرکت شعاعی خواهد داشت. باتوجه به رابطهٔ (4-20) کرنش ها برابر خواهند شد با؛

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{و} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \text{و} \quad \gamma_{r\theta} = 0 \qquad (11\text{-}3)$$

با قراردادن $u = r\,\varepsilon_\theta$ در عبارت اول رابطهٔ (11-3)، رابطهٔ سازش زیر بدست می آید؛

$$\frac{du}{dr} - \varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\,\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0$$

یا

$$r\,\frac{d\,\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \qquad (11\text{-}4)$$

رابطهٔ تعادل [رابطهٔ (11-1) یا (11-2)]، رابطهٔ کرنش تغییرمکان یا رابطهٔ سازش [رابطهٔ (11-3) یا (11-4)]، و قانون هوک برای حل مسائل متقارن محوری، باتوجه به شرایط مرزی کفایت می کنند.

11-2 پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم؛

پوسته‌های استوانه‌ای در مسائل مهندسی به پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم تقسیم می‌شوند. در پوسته استوانه‌ای جدار نازک، باتوجه به محدودیت‌هائی، تنش محیطی در امتداد ضخامت ثابت فرض می‌شود. وقتی این پوسته تحت فشار داخلی قرار دارد، تنش محیطی در آن برابر است با؛

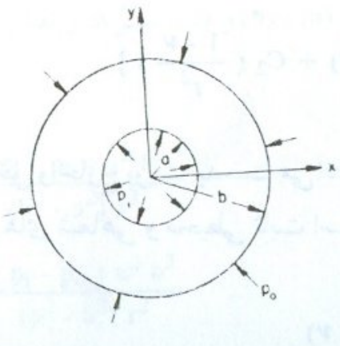
$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t}$$

که در آن؛ P فشار داخلی، r شعاع متوسط، و t ضخامت پوسته است. اگر نسبت ضخامت به شعاع تقریباً 10% بیشتر باشد، پوسته جدار ضخیم نامیده می‌شود، و در این حالت تغییرات تنش‌ها در امتداد ضخامت قابل صرفنظرکردن نیست (مثال ۱ـ ۱۱).

در پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت، تغییر شکل حول محور z یکنواخت است. درنتیجه روابط تعادل و کرنش ـ تغییرمکان، روابط (11-2) و (11-3)، برای حلقه‌ای بطول واحد که از پوسته بریده شده است، شکل (11-2)، صادق می‌باشد. بافرض اینکه دو انتهای پوسته آزاد است، $\sigma_z = 0$ بوده، و طبق قانون هوک کرنش‌ها برابر خواهند شد با؛

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_\theta)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\,\sigma_r) \qquad (11\text{-}5)$$



شکل (11-2)

از رابطهٔ (5 -11) تنش برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) = \cancel{0}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\,\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) = \cancel{0} \qquad (11\text{-}6)$$

با قراردادن تنش‌ها از رابطهٔ (6 -11) در رابطهٔ تعادل (2 -11) معادلهٔ دیفرانسیل زیر برای تغییر مکان شعاعی بدست می‌آید؛

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \qquad (11\text{-}7)$$

که با حل آن u برابر خواهد شد با؛

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \qquad (a)$$

با ترکیب روابط (a) و (6 -11)، تنش‌های شعاعی و محیطی برحسب ثابتهای C_1 و C_2 برابر می‌شوند با؛

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2\left(\frac{1-\nu}{r^2}\right)\right] \qquad (b)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) + C_2\left(\frac{1-\nu}{r^2}\right)\right] \qquad (c)$$

ثابت‌ها برحسب شرایط داخل و خارج پوسته بدست می‌آیند.
دیده می‌شود که جمع تنش‌های شعاعی و محیطی ثابت است؛

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2EC_1/(1-\nu)$$

درنتیجه کرنش طولی نیز مقدار ثابتی است؛

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{Constant}$$

این بدان مفهوم است که سطوح مستوی اولیه، مستوی باقی می‌مانند. تنش طولی برابر است با؛

$$\sigma_z = E\,\varepsilon_z = \text{Constant} = C$$

اگر دو انتهای استوانه آزاد باشد؛

$$\int_a^b \sigma_z\, 2\pi r\,dr = \pi c\,(b^2 - a^2) = 0$$

یا $\sigma_z = c = 0$ ، طبق آنچه که قبلاً فرض شد.

برای یک استوانه تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o، شرایط مرزی عبارت خواهند بود از؛

$$(\sigma_r)_{r=a} = -P_i \quad \text{و} \quad (\sigma_r)_{r=b} = -P_o \qquad (d)$$

که علامت منفی نشاندهنده تنش فشاری است. با قراردادن شرایط (d) در رابطهٔ (b)، ثابت‌ها برابر می‌شوند با؛

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E}\,\frac{a^2 p_i - b^2 P_o}{b^2 - a^2} \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{1+\nu}{E}\,\frac{a^2 b^2 (p_i - P_o)}{b^2 - a^2} \qquad (e)$$

با قراردادن ثابت‌ها در روابط (a)، (b) و (c)، تنش‌ها و تغییر مکان شعاعی بصورت زیر بدست می‌آیند؛

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_o)\,a^2 b^2}{(b^2 - a^2)\,r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_o)\,a^2 b^2}{(b^2 - a^2)\,r^2}$$

$$u = \frac{1-\nu}{E}\,\frac{(a^2 p_i - b^2 P_o)\,r}{b^2 - a^2} + \frac{1+\nu}{E}\,\frac{(p_i - P_o)\,a^2 b^2}{(b^2 - a^2)\,r}$$

این روابط اولین بار توسط G. Lame' بدست آمد و بهمین نام نامیده می‌شود. ماگزیمم مقدار σ_r بستگی به مقادیر P_i و P_o دارد. اگر $P_i > P_o$ باشد، $\sigma_{r_{max}}$ در شعاع a اتفاق می‌افتد و برابر P_i است. در حالت $P_o > P_i$ ، $|\sigma_{r_{max}}| = P_o$ می‌باشد. تنش محیطی ماگزیمم و محل آن در قسمت (11-3) مورد بحث قرار می‌گیرد.

تنش برشی ماگزیمم، نصف تفاوت مقادیر جبری تنش‌های اصلی است. درنتیجه در هر نقطه از استوانه، τ_{max} برابر می‌شود با؛

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{(p_i - p_o)\, a^2 b^2}{(b^2 - a^2)\, r^2} \qquad (11\text{-}9)$$

بیشترین τ_{max} در $r = a$ اتفاق می‌افتد. از رابطهٔ (11-9) پیدا است که با کم‌کردن P_o، تنش برشی ازدیاد می‌یابد. درنتیجه بزرگترین مقدار τ_{max}، در $r = a$ و $P_o = o$ بوده و برابر خواهد شد با؛

$$\tau_{max} = \frac{p_i b^2}{(b^2 - a^2)} \qquad (f)$$

چون σ_r و σ_θ تنش‌های اصلی هستند، τ_{max} در صفحه‌ای با زاویهٔ $45°$ نسبت به σ_r و σ_θ عمل می‌کند.

حالت‌های خاص؛

(a) پوسته استوانه‌ای تحت فشار داخلی؛

اگر پوسته فقط تحت فشار داخلی باشد، $P_o = o$، رابطهٔ (11-8) بصورت زیر درمی‌آید؛

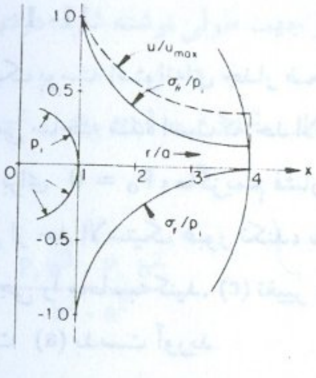
$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (11\text{-}10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (11\text{-}11)$$

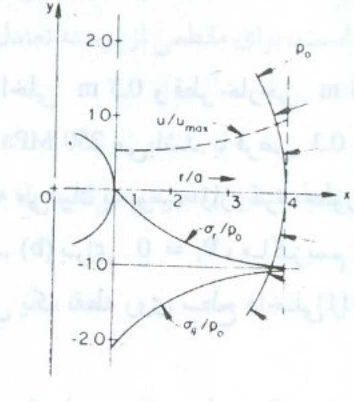
$$u = \frac{a^2 p_i r}{E (b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \qquad (11\text{-}12)$$

چون $\frac{b^2}{r^2} \geq 1$ است، σ_r بجز در $r = b$ که مقدار آن صفر است، همیشه منفی (فشاری) می‌باشد. این تنش در $r = a$ ماگزیمم مقدار خود را داراست. σ_θ برای همه شعاعها مثبت (کششی) بوده و در $r = a$ ماگزیمم مقدار خود را دارد.

در حالت $P_o = 0$، برای $\frac{b}{a} = 4$، توزیع تنش‌ها و تغییرمکان بی‌بعد در مقابل شعاع بی‌بعد در شکل (11-3a) نشان داده شده است.



(a)



(b)

شکل (11-3)

(b) پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی؛

در این حالت $P_i = 0$ است و رابطهٔ (11-8) بصورت زیر درمی‌آید؛

$$\sigma_r = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (11\text{-}13)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (11\text{-}14)$$

$$u = \frac{-b^2 p_o r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} \right] \qquad (11\text{-}15)$$

تنش شعاعی همیشه فشاری است و در $r = b$ ماگزیمم است. تنش محیطی نیز فشاری است و در $r = a$ ماگزیمم مقدار خود را داراست. تغییرات تنش‌ها و تغییر مکان، برای حالت $\frac{b}{a} = 4$، در شکل (11-3b) نشان داده شده است.

مثال 11-1

یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم به قطر داخلی 0.3 m و قطر خارجی 0.4 m از جنسی ساخته شده است که حد الاستیک آن 250 MPa می‌باشد. با فرض $\gamma = 0.3$، (a) برای $P_o = 0$، ماگزیمم فشار داخلی را که می‌توان به پوسته وارد کرد، بطوری که تنش از حد الاستیک عبور نکند، بدست آورید، (b) برای $P_i = 0$، ماگزیمم فشار خارجی را محاسبه کنید. (c) تغییر مکان شعاعی یک نقطه روی سطح داخلی را برای حالت (a) بدست آورید.

حل -

(a) - از رابطهٔ (11-11)، برای $r = a$، نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_{\theta\,max} = P_i \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \qquad (11\text{-}16)$$

یا

$$P_i = \sigma_{\theta\,max} \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = (250 \times 10^6) \frac{0.2^2 - 0.15^2}{0.2^2 + 0.15^2} = 70 \text{ MPa}$$

(b) از رابطهٔ (11-14)، برای $r = a$، نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_{\theta\,max} = -2 P_o \frac{b^2}{b^2 - a^2} \qquad (11\text{-}17)$$

یا

$$P_o = -\sigma_{\theta\,max} \frac{b^2 - a^2}{2 b^2} = -(-250 \times 10^6) \frac{0.2^2 - 0.15^2}{(2)\,0.2^2} = 54.7 \text{ MPa}$$

(c) از رابطهٔ (11-12) نتیجه می‌شود؛

$$u_{r=a} = \frac{0.15^3 \times 70 \times 10^6}{E\,(0.2^2 - 0.15^2)} \left[0.7 + 1.3 \frac{0.2^2}{0.15^2} \right] = \frac{4.065 \times 10^7}{E} \text{ m}$$

در حالتی که پوسته دو سر بسته است، و تحت فشارهای داخلی و خارجی قرار دار[د]، علاوه بر تنش‌های شعاعی و محیطی در جهت z نیز تنش وجود دارد. برای مقطعی [به] فاصله مناسب از انتها، این تنش را می‌توان یکنواخت فرض کرد. برای محاسبه این تن[ش] کافی است، برای مقطعی از پوسته تعادل الاستیک در جهت طولی نوشته شود. درنتیج[ه]

$$\pi a^2 - P_o \pi b^2 = (\pi b^2 - \pi a^2)\, \sigma_z$$

از این رابطه تنش σ_z برابر می‌شود با؛

$$\sigma_z = \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \qquad (11\text{-}18)$$

واضح است که در این حالت دو انتهای پوسته گیردار فرض نشده است. به عبارت دیگ[ر] $\varepsilon_z \neq 0$ می‌باشد. (به مسأله 11-10 مراجعه شود).

11-3 تنش محیطی ماگزیمم؛

بطوری که از شکل (11-3) پیدا است، در هر دو حالت فشار داخلی تنها و فشار خارجی تنها، ماگزیمم تنش محیطی در لایه‌های داخلی، $r = a$، اتفاق می‌افتد. بهرحال این نتیجه برای حالتی که فشار داخلی و فشار خارجی همزمان وارد می‌آیند صادق نیست. بطوری که در قسمت زیر نشان داده خواهد شد، حالتهائی پیش می‌آید که ماگزیمم تنش محیطی در $r = b$ رخ می‌دهد.

یک پوستهٔ جدار ضخیم مطابق شکل (11-2) درنظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود پوسته تحت فشارهای داخلی P_i و فشار خارجی P_o قرار دارد. نسبت $\frac{b}{a}$ با R، $\frac{P_o}{P_i}$ با P، و نسبت تنش محیطی در سطح داخلی به تنش محیطی در سطح خارجی با S نشان داده

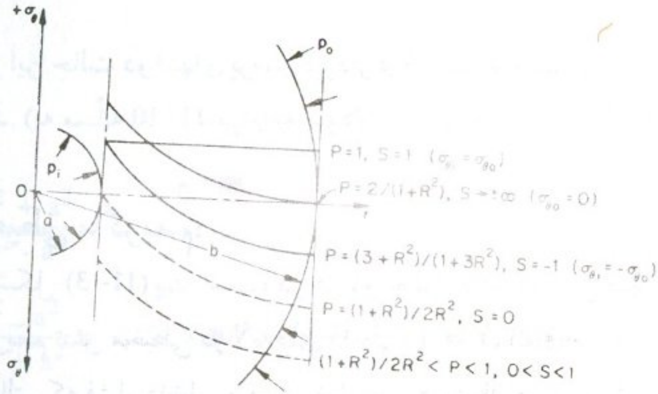
می‌شود. در این صورت تنش محیطی از رابطهٔ (8 -11) بصورت زیر درمی‌آید؛

$$\sigma_\theta = P_i \frac{1 - PR^2}{R^2 - 1} + P_i\, b^2 \frac{1 - P}{(R^2 - 1)\, r^2} \qquad \text{(a)}$$

در نتیجه؛

$$S = \frac{\sigma_{\theta i}}{\sigma_{\theta o}} = \frac{1 + R^2 (1 - P) / 1 - PR^2}{1 + (1 - P) / 1 - PR^2} \qquad (11\text{-}19)$$

تغییر تنش محیطی در امتداد ضخامت پوسته، برای چند مقدار S و P در شکل (4 -11) نشان داده شده است. توجه داشته باشید که برای نسبت‌های فشار P که با خط‌چین نشان داده شده است، تنش محیطی ماگزیمم در سطح خارجی پوسته اتفاق می‌افتد.



شکل (4 -11)

4 -11 کاربرد تئوریهای تسلیم؛

در بسیاری موارد، برای طرح پوستهٔ جدار ضخیم، لازم است امکان نارسائی و شکل

نارسائی برآورد گردد. درنتیجه، درحالی که با مراجعه به شکل (4 -11) می‌توان پیش‌بینی کرد که تسلیم از داخل و یا خارج شروع می‌شود، باید بتوان فشار یا تنش‌های تسلیم را برآورد کرد. بدین منظور باید باتوجه به مقدار تنش‌ها طبق رابطهٔ (8 -11)، مقاومت جسم، و انتخاب تئوری مناسب، این خواسته‌ها را محاسبه نمود.

مثال 2 -11

یک پوسته استوانه‌ای فولادی تحت فشار داخلی و خارجی قرار دارد، و نسبت فشار داخلی به فشار خارجی چهار است. مقاومت الاستیک کششی فولاد، $\sigma_{yp} = 340$ MPa، و مقاومت الاستیک برشی آن، $\tau_{yp} = \sigma_{yp} / 2 = 170$ MPa می‌باشد. ابعاد پوسته عبارتند از $a = 0.1$ m و $b = 0.15$ m و $\gamma = 0.3$ است. تنش داخلی مجاز را باتوجه به تئوریهای مختلف نارسائی برآورد نمائید.

حل - تنش‌های ماگزیمم در لایهٔ داخلی اتفاق می‌افتد. از رابطهٔ (8 -11)، برای $r = a$ و $P_i = 4\,P_o$ نتیجه خواهد شد؛

$$\sigma_\theta = \frac{P_i\,(a^2 + b^2) - 2\,P_o\,b^2}{b^2 - a^2} = 1.7\,P_i \quad \text{و} \quad \sigma_r = -\,P_i \qquad \text{(a)}$$

حال باتوجه به تئوریهای مختلف تسلیم، مقدار فشار داخلی برای شروع تسلیم محاسبه می‌شود:

(a) تئوری ماگزیمم تنش اصلی:

$$1.7\ P_i = 340 \times 10^6 \quad \text{و} \quad P_i = 200\ \text{MPa}$$

(b) تئوری ماگزیمم تنش برشی:

$$\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = 1.35\ P_i = 170 \times 10^6 \quad \text{و} \quad P_i = 125.9\ \text{MPa}$$

(c) تئوری ماگزیمم انرژی تغییرشکل:

$$\sigma_{yp} = (\,\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 - \sigma_\theta\,\sigma_r\,)^{1/2} = P_i\,[\,(1.7)^2 + (-1)^2 - (-1.7\,)\,]^{1/2}$$

$2.364\ P_i = 340 \times 10^6$ و $P_i = 143.8\ \ \text{MPa}$

(d) تئوری ماگزیمم کرنش اصلی:

$$\frac{1}{E}\,(\ \sigma_\theta - \nu\ \sigma_r\ ) = \frac{340 \times 10^6}{E} = \frac{2}{E}\,P_i$$

$P_i = 170\ \ \text{MPa}$

(e) تئوری تنش برش هشت‌وجهی:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,\sigma_{yp} = \frac{1}{3}\ [\ (\ \sigma_\theta - \sigma_r\ )^2 + (\sigma_r)^2 + (-\,\sigma_\theta)^2\ ]^{1/2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\,(340 \times 10^6) = \frac{P_i}{3}\ [\ (2.7)^2 + (-1)^2 + (-1.7)^2\ ]^{1/2}$$

$P_i = 143.8\ \ \text{MPa}$

نتایج دو حالت (c) و (e) همانطور که انتظار می‌رفت برابر هستند. چون پوسته از فولاد نرم ساخته شده است، برای عبور از حد الاستیک، تئوری ماگزیمم تنش برشی کاربرد دارد. درنتیجه حد فشار داخلی 125.9 MPa است و در طراحی باید ضریب اطمینان لازم را درنظر گرفت.

11 -5 پوسته‌های استوانه مرکب؛

اگر طراحی صحیح انجام شود، در فشارهای نسبتاً زیاد، پوسته‌های استوانه‌ای مرکب نسبت به یک پوسته تنها راندمان بهتری خواهند داشت. به عبارت دیگر در شرایط فشار یکسان، برای ساخت پوسته مرکب جنس کمتری مصرف شود. برای اینکه پوسته مرکب بصورت واحد عمل کند، لازم است استوانه داخلی در داخل استوانه خارجی جا زده شود. بدین منظور در حالتی که پوسته مرکب از دو استوانه تشکیل شده است، شعاع خارجی پوسته داخلی کمی بیشتر از شعاع داخلی پوسته خارجی انتخاب می‌شود. سپس پوسته خارجی حرارت داده شده، و پوسته داخلی داخل آن جا داده می شود. پس

از سردشدن در سطح تماس دو پوسته فشار P ، بنام فشار جازدن، ایجاد می شود، و آنرا می‌توان با استفاده از روابط قسمت 2 -11 محاسبه نمود. مثالهائی از پوسته‌های مرکب که می‌تواند فشارهای خیلی زیاد تحمل نماید، را می‌توان در کمپرسورها، پرسهای اکستروژن، و امثال آن مشاهده نمود.

یک پوسته مرکب مطابق شکل (11 -5a) درنظر گرفته، فرض می‌شود در حالت بدون تنش، شعاع خارجی پوسته داخلی باندازه δ از شعاع داخلی پوسته خارجی بیشتر باشد. مقدار δ بنام «فاصلهٔ جازدن» نامیده می‌شود. پس از جازدن در سطح تماس فشار P ایجاد می‌شود. مقدار فشار باندازه‌ای است که جمع تغییر شعاع خارجی پوسته داخلی و شعاع داخلی پوسته خارجی برابر δ خواهد شد. با بحث فوق و با استفاده از روابط (11-12) و (15 -11) نتیجه خواهد شد؛

$$\delta = \frac{bP}{E}\ (\ \frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \nu\ ) + \frac{bP}{E}\ (\ \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \nu\ ) \tag{11- 20}$$

از این رابطه، فشار P برحسب δ بصورت زیر بدست می‌آید؛

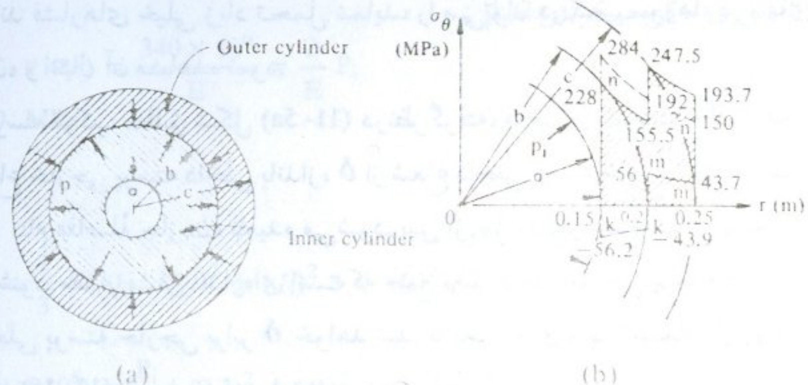
$$P = \frac{E\ \delta}{b}\ .\ \frac{(\ b^2 - a^2)\ (c^2 - b^2)}{2\ b^2\ (c^2 - a^2)} \tag{11- 21}$$

تنش‌ها در پوسته خارجی با استفاده از روابط (10 -11) و (11 -11)، و با درنظر گرفتن $P_i = P$ و $P_o = 0$ بدست می آید. تنش درپوسته داخلی نیز ازروابط (13 -11) و (14 -11)، با درنظر گرفتن $P_i = 0$ و $P_o = P$ محاسبه می‌شود.

مثال 3 -11

یک پوستهٔ مرکب با $a = 150$ mm ، $b = 200$ mm ، $c = 250$ mm ، $E = 200$ Gpa و $\delta = 0.1$ mm تحت فشار داخلی 140 MPa قرار دارد. توزیع تنش محیطی در جدارهٔ مرکب را بدست آورید.

حل ـ قبل از اعمال فشار داخلی، فشار جازدن از رابطهٔ (21 -11) برابر است با؛



شکل (5-11)

$$P = \frac{200\times 10^9 \times 0.0001}{0.2}\cdot\frac{(0.2^2 - 0.15^2)\ (0.25^2 - 0.2^2)}{2\ (0.2^2)\ (0.25^2 - 0.15^2)} = 12.3 \text{ MPa}$$

تنش‌های محیطی در پوسته خارجی در اثر این فشار، با استفاده از رابطهٔ (11-11) برابر می‌شوند با؛

$$(\sigma_\theta)_{r=0.2} = P\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} = 12.3\times 10^6 \ \frac{0.2^2 - 0.25^2}{0.25^2 - 0.2^2} = 56 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_\theta)_{r=0.25} = \frac{2\,P\,b^2}{c^2 - b^2} = 2\times 12.3\times 10^6 \ \frac{0.2^2}{0.25^2 - 0.2^2} = 43.7 \text{ MPa}$$

تنش‌های محیطی در پوسته داخلی از رابطهٔ (11-14) برابر می‌شوند با؛

$$(\sigma_\theta)_{r=0.15} = -\frac{2\,P\,b^2}{b^2 - a^2} = -2\times 12.3\times 10^6 \ \frac{0.2^2}{0.2^2 - 0.15^2} = -56.2 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_\theta)_{r=0.2} = -P\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = -12.3\times 10^6 \ \frac{0.2^2 + 0.15^2}{0.2^2 - 0.15^2} = -43.9 \text{ MPa}$$

این تنش‌ها در شکل (11-5b) با خط‌چین‌ها kk و mm نشان داده شده‌اند. تنش‌های محیطی فقط در اثر فشار داخلی 140 MPa، از رابطهٔ (11-11) با قراردادن b = c برابر خواهند شد با؛

$$(\sigma_\theta)_{r=0.15} = 284 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad (\sigma_\theta)_{r=0.2} = 192 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad (\sigma_\theta)_{r=0.25} = 150 \text{ MPa}$$

توزیع این تنش‌ها در شکل (11-5b) با خط‌چین nn نشان داده شده است. نتیجه تنش از ترکیب تنش‌های بدست‌آمده حاصل می‌شود. این توزیع نیز در شکل (11-5b) بصورت خط پررسم شده است. درنتیجه دیده می‌شود که در پوسته مرکب، تنش ماگزیمم از 284 MPa به 247.5 MPa تقلیل یافته است. اگر در طرح پوسته از تئوری ماگزیمم تنش نرمال استفاده شود، وزن پوسته به مقدار قابل توجهی کم خواهد شد.

باید توجه داشت که استفاده از یک پوسته دیگر باندازه پوسته اضافی اول در کم‌کردن تنش مؤثر نیست. ولی بهرحال یک پوسته چند لایه می‌تواند فشار بیشتری را نسبت به پوسته یک لایه تحمل نماید. با طراحی مناسب می‌توان در پوسته چندلایه توزیع تنش تقریباً یکنواختی ایجاد کرد[1]

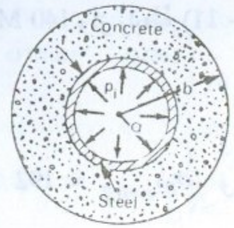
مثال 11-4

در شکل (11-6) یک لوله هادی مایع نشان داده شده است. این لوله از یک لولهٔ نازک فولادی و پوششی از بتون تشکیل گردیده است. مشخصات فولاد و بتن ترتیب E_s، E_c و ν_c می‌باشد. لوله مرکب تحت فشار داخلی P_i بین فولاد و بتن را محاسبه کنید.

حل ـ تغییر مکان لوله بتنی در r = a از رابطهٔ (11-12) برابر می‌شود با؛

$$u = \frac{Pa}{E_c}\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \nu_c\right) \qquad \text{(a)}$$

۱ - برای مثال رجوع شود به: S. J. Becker and L. Mollick, The Theory of The ideal design of a Compound vessel, Trans. ASME, J. Engineering for Industry, P. 136 (May 1960)



شکل (6 -11)

لولهٔ فولادی تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P قرار دارد. درنتیجه تنش محیطی در این لوله برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_\theta = \frac{P_i - P}{t}\ (a - t / 2) = \frac{P_i - P}{2} \left(\frac{2a}{t} - 1 \right) \qquad \text{(b)}$$

با استفاده از قانون هوک و رابطهٔ (2 -11)، در $r = a$، رابطهٔ تنش ـ تغییرمکان بصورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_\theta = E_s\ \varepsilon_\theta = E_s\ \frac{u}{a} \qquad \text{(c)}$$

با محاسبهٔ u از روابط (b) و (c) و قراردادن آن در رابطهٔ (a)، فشار بین دو برابر می‌شود با؛

$$P = \frac{P_i}{1 + (E_s / E_c)\ (2t / (2a - t))\ ((a^2 + b^2) / (b^2 - a^2) + \nu_c)} \qquad \text{(11- 22a)}$$

در عمل می‌توان از مقادیر زیر استفاده کرد؛

$$\frac{E_s}{E_c} = 15 \quad \text{و} \quad \nu_c = 0.2 \quad \text{و} \quad \frac{2t}{2a - t} \approx \frac{t}{a}$$

درنتیجه رابطهٔ (22a -11) به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید؛

$$P = \frac{P_i}{1 + 15\ (t / a)\ ((R^2 + 1) / (-R^2 + 1) + 0.2)}$$

که در آن $R = \frac{a}{b}$ می‌باشد. از روابط فوق دیده می‌شود که با ازدیاد ضخامت t، فشار منتقل شده به لوله بتنی تقلیل می‌یابد. در ضمن برای هر مقدار مشخص $\frac{t}{a}$، فشار P با ازدیاد نسبت قطرها (R) زیادتر می‌شود.

6 -11 دیسک دوّار با ضخامت ثابت؛

رابطهٔ تعادل (1 -11)، با اضافه‌کردن نیروی گریز از مرکز به عنوان نیروی حجمی، می‌تواند برای دیسک دوّار بکار رود. در این حالت تنش حاصل از اثر چرخش حول محور چرخش توزیع یکنواخت دارد و فرض می‌شود بستگی به ضخامت دیسک ندارد. درنتیجه، با استفاده از رابطهٔ (1 -11) همراه با نیروی حجمی F_r برابر $\rho\,\omega^2 r$ (برای واحد حجم) نتیجه می‌شود؛

$$\frac{d\,\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\,\omega^2 r = 0 \qquad \text{(11- 23)}$$

در این رابطه ρ دانسیته جرمی و ω سرعت زاویه‌ای ثابت دیسک برحسب رادیان بر ثانیه می‌باشد. باید توجه داشت که از نیروی حجمی در اثر وزن، $\rho\,g$، صرفنظر شده است. با قراردادن رابطهٔ (16 -11) در رابطهٔ (23 -11) نتیجه خواهد شد؛

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\ \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -(1 - \nu^2)\ \rho\,\omega^2 r / E \qquad \text{(a)}$$

این عبارت دارای دو جواب عمومی و خصوصی است. جواب عمومی همان رابطهٔ (a) قسمت (2 -11) می‌باشد. بسهولت می‌توان نشان داد که جواب خصوصی نیز بصورت زیر است؛

$$u_p = -(1 - \nu^2)\ \frac{\rho\,\omega^2 r^3}{8\,E}$$