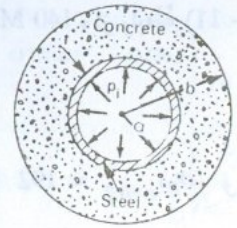


شکل (11-6)

لولهٔ فولادی تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P قرار دارد. درنتیجه تنش محیطی در این لوله برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_\theta = \frac{P_i - P}{t} (a - t / 2) = \frac{P_i - P}{2} \left(\frac{2a}{t} - 1 \right) \tag{b}$$

با استفاده از قانون هوک و رابطهٔ (2 -11)، در $r = a$، رابطهٔ تنش ـ تغییرمکان بصورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_\theta = E_s \ \varepsilon_\theta = E_s \ \frac{u}{a} \tag{c}$$

با محاسبهٔ u از روابط (b) و (c) و قراردادن آن در رابطهٔ (a)، فشار بین دو برابر می شود با؛

$$P = \frac{P_i}{1 + (E_s / E_c) \ (2t / (2a - t)) \ ((a^2 + b^2) / (b^2 - a^2) + \nu_c)} \tag{11- 22a}$$

در عمل می‌توان از مقادیر زیر استفاده کرد؛

$$\frac{E_s}{E_c} = 15 \quad و \quad \nu_c = 0.2 \quad و \quad \frac{2t}{2a - t} \approx \frac{t}{a}$$

درنتیجه رابطهٔ (22a -11) به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید؛

$$P = \frac{P_i}{1 + 15 \ (t / a) \ ((R^2 + 1) / (-R^2 + 1) + 0.2)}$$

که در آن $R = \frac{a}{b}$ می‌باشد. از روابط فوق دیده می‌شود که با ازدیاد ضخامت t، فشار منتقل شده به لوله بتنی تقلیل می‌یابد. در ضمن برای هر مقدار مشخص $\frac{t}{a}$، فشار P با ازدیاد نسبت قطرها (R) زیادتر می‌شود.

6 -11 دیسک دوّار با ضخامت ثابت؛

رابطهٔ تعادل (1 -11)، با اضافه‌کردن نیروی گریز از مرکز به عنوان نیروی حجمی، می‌تواند برای دیسک دوّار بکار رود. در این حالت تنش حاصل از اثر چرخش حول محور چرخش توزیع یکنواخت دارد و فرض می‌شود بستگی به ضخامت دیسک ندارد. درنتیجه، با استفاده از رابطهٔ (1 -11) همراه با نیروی حجمی F_r برابر $\rho \omega^2 r$ (برای واحد حجم) نتیجه می‌شود؛

$$\frac{d \sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \tag{11- 23}$$

در این رابطه ρ دانسیته جرمی و ω سرعت زاویه‌ای ثابت دیسک برحسب رادیان بر ثانیه می‌باشد. باید توجه داشت که از نیروی حجمی در اثر وزن، ρg، صرفنظر شده است. با قراردادن رابطهٔ (16 -11) در رابطهٔ (23 -11) نتیجه خواهد شد؛

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -(1 - \nu^2) \rho \omega^2 r / E \tag{a}$$

این عبارت دارای دو جواب عمومی و خصوصی است. جواب عمومی همان رابطهٔ (a) قسمت (2 -11) می‌باشد. بسهولت می‌توان نشان داد که جواب خصوصی نیز بصورت زیر است؛

$$u_p = -(1 - \nu^2) \frac{\rho \omega^2 r^3}{8 E}$$

درنتیجه جواب کلی رابطه به صورت زیر خواهد بود؛

$$u = \frac{-\rho\,\omega^2 r^3 (1-\nu^2)}{8E} + C_1 r + \frac{C_2}{r} \qquad (11\text{- }24\ a)$$

با استفاده از رابطهٔ (6 -11)، تنش‌های شعاعی و محیطی برابر می‌شوند با؛

(11- 24 b)

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{-(3+\nu)(1-\nu^2)\ \rho\,\omega^2 r^2}{8E} + (1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}\right]$$

(11- 24 c)

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{-(1+3\nu)(1-\nu^2)\ \rho\,\omega^2 r^2}{8E} + (1+\nu)C_1 + (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}\right]$$

ثابت‌های C_1 و C_2 از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

دیسک توخالی؛

در دیسک توخالی فشار در مرزهای داخل $(r = a)$ و خارج $(r = b)$ صفر است.
درنتیجه شرایط مرزی بصورت زیر خواهد بود؛

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \qquad\qquad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \qquad (b)$$

با قراردادن این شرایط در رابطهٔ (11 -24 b) روابط زیر بدست می‌آید؛

$$O = -\rho\,\omega^2 \frac{a^2}{E}\ \frac{(1-\nu^2)(3+\nu)}{8} + (1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{a^2}$$

(c)

$$O = -\rho\,\omega^2 \frac{b^2}{E}\ \frac{(1-\nu^2)(3+\nu)}{8} + (1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{b^2}$$

از حل این روابط ثابت‌ها برابر می‌شوند با؛

$$C_1 = \rho\,\omega^2\ \frac{(a^2+b^2)}{E}\ .\ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{8}$$

$$C_2 = \rho\,\omega^2\ \frac{a^2 b^2}{E}\ .\ \frac{(1+\nu)(3+\nu)}{8}$$

درنتیجه تنش‌ها و تغییرمکان در دیسک توخالی برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2}\right)\rho\,\omega^2$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\left(a^2 + b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2}\right)\rho\,\omega^2 \qquad (11\text{- }25)$$

$$u = \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{8E}\left(a^2 + b^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu}r^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu}.\frac{a^2 b^2}{r^2}\right)\rho\,\omega^2 r$$

با اعمال شرط $\frac{d\sigma_r}{dr} = 0$ در رابطه‌اول دیده می‌شودکه تنش‌شعاعی ماگزیمم در $r = \sqrt{ab}$ رخ می‌دهد. شکل (11 -7 a) توزیع بدون بعد تنش و تغییرمکان را بصورت تابعی از شعاع دیسک توخالی برای حالت $b/a = 4$ نشان می‌دهد.

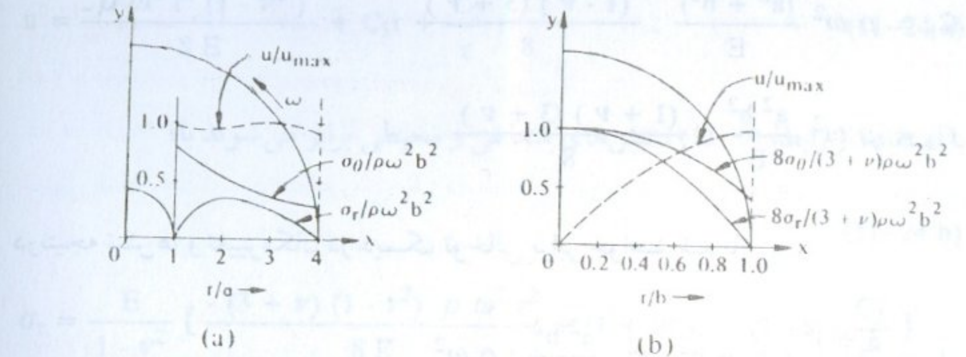
دیسک توپر؛

در این حالت $a = o$ است و شرایط مرزی بصورت زیر خواهند بود؛

$$(\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad \text{و} \quad (u)_{r=o} = 0 \qquad (c)$$

برای اینکه شرط تغییرمکان ارضاء شود، باید ثابت C_2 در رابطهٔ (11- 24 a) صفر شود. ثابت C_1 از شرط تنش و از رابطهٔ (d) برابر می‌شود با؛

$$C_1 = \rho\,\omega^2\ \frac{b^2}{E}\ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{8}$$



شکل (7 -11)

با قراردادن ثابت‌ها در رابطهٔ (24 -11) نتایج زیر بدست می‌آید؛

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\left(b^2 - r^2 \right) \rho\, \omega^2$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\left(b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}\, r^2 \right) \rho\, \omega^2 \qquad (11\text{-}26)$$

$$u = \frac{1-\nu}{8\,E}\left[(3+\gamma)\, b^2 - (1+\nu)\, r^2 \right] \rho\, \omega^2\, r$$

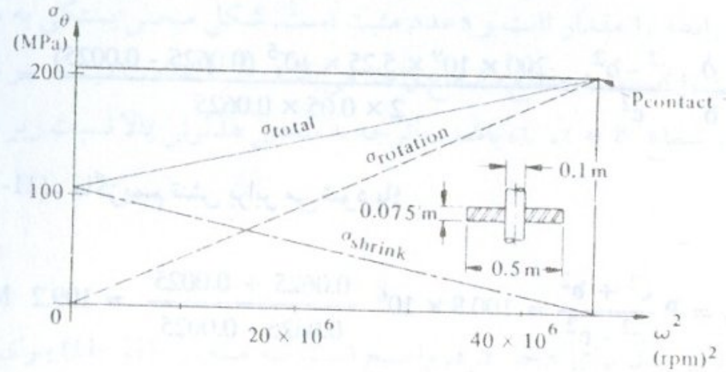
توزیع بی‌بعد تنش و تغییرمکان برای دیسک توپر در شکل (7b -11)، بصورت تابعی از شعاع نشان داده شده است.

دیسک دوّار با ضخامت ثابت بیشتر در مواردی که تنش‌ها یا سرعت کم است مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این حالت همانطور که از شکل (7b -11) پیدا است، استفاده خوبی از جنس نشده است. انواع دیگر دیسک دوّار در قسمت‌های بعد بررسی و تحلیل خواهد شد.

مثال 5 -11

یک دیسک به قطر داخلی 0.1 m، قطر خارجی 0.5 m، و ضخامت 0.075 m روی یک محور فولادی مطابق شکل (8 -11) جا زده شده است. اگر سرعت ماگزیمم این مجموعه 6900 rpm باشد:

(a) فاصله جازدن چقدر است؟ ، (b) حداکثر تنش در حالت بدون چرخش را بدست آورید، و (c) حداکثر تنش در حال چرخش را محاسبه نمائید. مشخصات فولاد عبارتند از $\rho = 7.8\ \mathrm{KN.S^2/m^4}$ ، $E = 200$ Gpa ، و $\nu = 0.3$.



شکل (8 -11)

حل -

(a) تغییر مکانهای شعاعی دیسک، ud ، و محور ، us ، از روابط (25 -11) و (26 -11) برابرند با؛

$$ud = 0.05 \times \frac{3.3 \times 0.7}{8\,E}\left(0.0025 + 0.0625 - \frac{1.3}{3.3} \times 0.0025 + \frac{1.3}{0.7} \times 0.0625\right) \rho\, \omega^2$$

$$= 0.0026\, \rho\, \frac{\omega^2}{E}$$

$$us = 0.05 \times \frac{0.7}{8\,E}\,(3.3 \times 0.0025 - 1.3 \times 0.0025)\,\rho\,\omega^2 = 2.1875 \times 10^{-5}\,\rho\,\frac{\omega^2}{E}$$

باتوجه به اینکه us کمتر از یک درصد ud است، می‌تواند صرفنظر شود. مقدار دقیق فاصله جازدن برابر خواهد شد با؛

$$\delta = ud - us = \frac{(0.0026 - 2.1875 \times 10^{-5}) \times 7.8 \times 10^3\,(6900 \times 2\pi / 60)^2}{200 \times 10^9}$$

$$= 5.25 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

(b) با استفاده از رابطهٔ (21 -11) نتیجه می‌شود؛

$$P = \frac{E\,\delta}{2\,b} \cdot \frac{c^2 - b^2}{c^2} = \frac{200 \times 10^9 \times 5.25 \times 10^{-5}\,(0.0625 - 0.0025)}{2 \times 0.05 \times 0.0625} = 100.8\ \text{MPa}$$

از رابطهٔ (16 -11)، ماگزیمم تنش برابر می‌شود با؛

$$\sigma_{\theta,\max} = P\,\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = 100.8 \times 10^6\ \frac{0.0625 + 0.0025}{0.0625 - 0.0025} = 109.2\ \text{MPa}$$

(c) از رابطهٔ (25 -11)، برای $r = 0.05$، تنش ماگزیمم برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_{\theta,\max} = \frac{3.3}{8}\ (0.0025 + 0.0625 - \frac{1.9}{3.3} \times 0.0025 + 0.0625)\ \rho\,\omega^2$$

$$= 0.052\ \rho\,\omega^2 = 211.78\ \text{MPa}$$

تغییرات تنش در دیسک دوّار، در شکل (8 -11) نشان داده شده است.

7 -11 دیسک دوّار با ضخامت متغیر؛

در قسمت قبل دیده شد که در دیسک دوّار با ضخامت ثابت، بیشتریت تنش در لایه‌های داخلی اتفاق می افتد. بنابراین برای کم‌کردن وزن و اثر نیروی گریز از مرکز، در بسیاری از طرحها، مثل توربین بخار، دیسک در قسمت مرکزی ضخیم‌تر انتخاب شده و به سمت لایه‌های بیرونی نازکتر می‌شود.

روش تحلیل دیسک با ضخامت متغیر مشابه تحلیل دیسک با ضخامت ثابت است. برای مثال پروفیل مقطع شعاعی، شکل (9 -11)، بصورت هذلولی فرض می‌شود؛

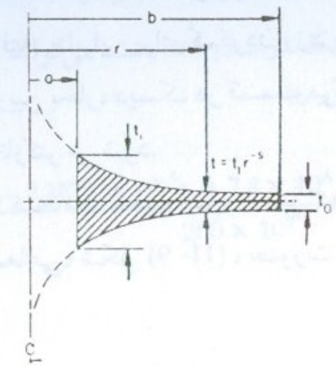
$$t = t_1\ r^{-s} \qquad (11\text{- }27)$$

در این رابطه t_1 مقدار ثابت و s عدد مثبت است. شکل منحنی بستگی به مقدار s دارد. درضمن t_1 ضخامت مقطع باشعاع واحد می‌باشد. اگرضخامت دیسک در شعاع $r = a$، t_i، و در شعاع $r = b$، t_o، باشد، باتوجه به منحنی هذلولی بالا نسبت زیر برقرار خواهد بود؛

$$\frac{t_i}{t_o} = \frac{t_1\ a^{-s}}{t_1\ b^{-s}}$$

که آنرا می‌توان برای s حل کرد. واضح است که منحنی (27 -11) برای دیسک توپر مناسب نیست، چون در $r = o$ ضخامت بی نهایت خواهد شد.

در عمل، مثل توربین‌های بخار، معمولاً در قسمت خارجی باید بعدها ضخیم باشد تا پره‌ها به آن متصل گردند. درضمن برای اتصال به محور در لبه داخلی نیز احتیاج به زائده‌ای می‌باشد. واضح است که در این حالت منحنی هذلولی با منحنی حقیقی یکی نخواهد بود، ولی برای یک برآورد تقریبی کفایت می‌کند. درصورتی که تحلیل دقیق‌تری موردنیاز باشد، دو قسمت داخلی و خارجی بصورت دیسک با ضخامت ثابت، و قسمت بینابین بصورت دیسک با ضخامت متغیر درنظر گرفته شده و با انتخاب شرایط مرزی مناسب مورد مطالعه قرار می‌گیرد.



شکل (9 -11)

معادله دیفرانسیل تعادل (رابطه 23 -11) در این مورد باید شامل (r) t باشد. این معادله شکل کلی زیر را بخود می‌گیرد؛

$$\frac{d}{dr}(tr\,\sigma_r) - t\,\sigma_\theta + t\,\rho\,\omega^2 r^2 = 0 \qquad (11\text{-}28)$$

رابطهٔ (28 -11) با انتخاب تابع تنش ϕ بصورت زیر ارضاء می‌شود؛

$$\phi = tr\,\sigma_r \quad \text{و} \quad \frac{d\phi}{dr} + t\,\rho\,\omega^2 r^2 = t\,\sigma_\theta \qquad (a)$$

حال رابطهٔ سازش (4 -11)، با استفاده از رابطهٔ (a) و قانون هوک بصورت زیر درمی‌آید؛

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + \left(1 - \frac{r}{t}\frac{dt}{dr}\right) r \frac{d\phi}{dr} + \left(\nu \frac{r}{t}\frac{dt}{dr} - 1\right)\phi = -(3+\nu)\,\rho\,\omega^2\, tr^3 \qquad (b)$$

رابطهٔ (b) با استفاده از رابطهٔ (27 -11) بصورت زیر درمی‌آید؛

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + (1+s)\, r \frac{d\phi}{dr} - (1+\nu s)\,\phi = -(3+\nu)\,\rho\,\omega^2\, t_1\, r^{3-s} \qquad (c)$$

با استفاده از انتقال $r = e^{\alpha}$، رابطهٔ (c) بصورت معادله دیفرانسیل خطی با ضریب ثابت، درمی‌آید؛

$$\frac{d^2\phi}{d\alpha^2} + s\frac{d\phi}{d\alpha} - (1+\nu s)\,\phi = -(3+\nu)\, t_1\, \rho\,\omega^2\, e^{(3-s)\alpha} \qquad (d)$$

معادله کمکی مربوط به رابطهٔ (d) به صورت زیر است؛

$$m^2 + s\,m - (1+\nu s) = 0$$

و ریشه‌های آن عبارتند از؛

$$m_{1,2} = -\frac{s}{2} \pm \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (1+\nu s)\right]^{1/2} \qquad (11\text{-}29)$$

درنتیجه حل کلی رابطهٔ (d) بصورت زیر خواهد بود؛

$$\phi = C_1 r^{m1} + C_2 r^{m2} - \frac{3+\nu}{8-(3+\nu)s}\, t_1\, \rho\,\omega^2 r^{3-s} \qquad (e)$$

با داشتن تابع تنش ϕ، مؤلفه‌های تنش در دیسک با ضخامت متغیر از رابطهٔ (a) برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_r = \frac{C_1}{t_1} r^{m1+s-1} + \frac{C_2}{t_1} r^{m2+s-1} - \frac{3+\nu}{8-(3+\nu)s}\,\rho\,\omega^2 r^2$$

$$(11\text{-}30)$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_1}{t_1} m_1 r^{m1+s-1} + \frac{C_2}{t_1} m_2 r^{m2+s-1} - \frac{1+3\nu}{8-(3+\nu)s}\,\rho\,\omega^2 r^2$$

برای یک دیسک پهن، t = Constant، در رابطهٔ (27 -11)، S = 0، ودر رابطهٔ (29 -11)،

$m = 1$ است. درنتیجه همانطور که انتظار می‌رود، رابطهٔ (30 -11) بصورت رابطهٔ (26 -11) درمی‌آید.

ثابت‌های C_1 و C_2 در رابطهٔ (30 -11) با استفاده از شرایط مرزی زیر بدست می‌آیند؛

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0 \quad \text{و} \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \tag{f}$$

محاسبه ثابت‌ها در مثال زیر آورده شده است.

مثال 6 -11

مقطع دیسک در طرح مثال 5 -11 بصورت هذلولی است، و اندازه‌های آن عبارتند از؛

$$t_i = 0.075 \text{ m} \quad \text{و} \quad t_o = 0.015 \text{ m} \quad \text{و} \quad a = 0.05 \text{ m} \quad \text{و} \quad b = 0.25 \text{ m} \quad \text{و} \quad \delta = 0.05 \text{ m}$$

سرعت چرخش 6900 rpm می‌باشد. (a) تنش ماگزیمم در اثر چرخش را محاسبه کنید. (b) تغییر مکان شعاعی لبه داخلی دیسک را بدست آورید.

حل -

(a) مقدار عدد مثبت S از رابطهٔ (27 -11) بدست می‌آید؛

$$\frac{t_i}{t_o} = \frac{t_1\, a^{-s}}{t_1\, b^{-s}} = \left(\frac{b}{a}\right)^s$$

با قراردادن $\frac{t_i}{t_o} = 5$ و $\frac{b}{a} = 5$، $S = 1$ خواهد شد. درنتیجه پروفیل مقطع بصورت؛

$$t = \frac{t_1}{r}$$

درمی‌آید. از رابطهٔ (29 -11) نتیجه می‌شود؛

$$m_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 + 0.3 \times 1) \right]^{1/2} \quad \text{و} \quad m_1 = 0.745 \quad \text{و} \quad m_2 = -1.745$$

درنتیجه تنش‌های شعاعی در $r = 0.05$ و $r = 0.25$ از رابطهٔ (30 -11) و شرایط مرزی (f) برابر می‌شوند با؛

$$(\sigma_r)_{r=0.05} = 0 = \frac{C_1}{t_1}\, 0.05^{\,0.795} + \frac{C_2}{t_1}\, 0.05^{-1.745} - 0.00176\, \rho\, \omega^2$$

$$(\sigma_r)_{r=0.25} = 0 = \frac{C_1}{t_1}\, 0.25^{\,0.795} + \frac{C_2}{t_1}\, 0.25^{-1.745} - 0.0439\, \rho\, \omega^2$$

از این رابطه نتیجه خواهد شد؛

$$\frac{C_1}{t_1} = 0.2529\, \rho\, \omega^2 \quad \text{و} \quad \frac{C_2}{t_1} = -6.272 \times 10^{-5} \,.\, \rho\, \omega^2$$

مؤلفه‌های تنش در دیسک، با قراردادن این مقادیر در رابطهٔ (30 -11)، برابر می‌شوند با؛

$$\sigma_r = (0.12529\, r^{0.745} - 6.272 \times 10^{-5}\, r^{-1.745} - 0.7\, r^2)\, \rho\, \omega^2$$

$$\sigma_\theta = (0.0933\, r^{0.745} + 1.095 \times 10^{-4}\, r^{-1.745} - 0.4\, r^2)\, \rho\, \omega^2 \tag{g}$$

تنش ماگزیمم در $r = 0.05$ اتفاق می‌افتد، و از رابطهٔ (g) برابر خواهد شد با؛

$$(\sigma_\theta)_{r=0.05} = 0.0294\, \rho\, \omega^2$$

در مثال 5 -11، تنش ماگزیمم برابر $0.052\, \rho\, \omega^2$ بود، و دیده می‌شود که با انتخاب ضخامت متغیر مقدار آن کاهش قابل ملاحظه‌ای نشان می‌دهد.

(b) تغییر مکان شعاعی از رابطهٔ (5 -11) همراه با رابطهٔ (g) برابر می‌شود با؛

$$(u)_{r=0.05} = (r\, \sigma_\theta / E)_{r=0.05} = 0.00147\, \rho\, \omega^2 / E$$

مجدداً با مقایسه با نتیجه بدست آمده در مثال 5 -11، $0.0026\ \rho\ \omega^2 / E$، کاهش زیادی را نشان می‌دهد.

8 -11 دیسک دوّار با تنش یکنواخت؛

اگر هر المان از دیسک دوّار تحت تنش از پیش تعریف شده (مثلاً مقدار ثابت) قرار گیرد، در مصرف جنس بیشترین راندمان حاصل خواهد شد. برای یک جنس خاص، در چنین طرحی هم وزن کمتر شده و هم نیروی اینرسی کمتر می‌شود. برای طرح چنین دیسکی باید $t\ (r)$ طوری انتخاب شود که در همه دیسک $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma = \text{Constant}$ باشد. در اینصورت با استفاده از قانون هوک $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon = \text{Constant}$ بوده و از رابطهٔ سازش (4 -11) ارضاء می‌گردد.

رابطهٔ تعادل (28 -11) در این حالت بصورت زیر درمی‌آید؛

$$\sigma \frac{d}{dr}(rt) - t\,\sigma + \rho\,\omega^2\,tr^2 = 0$$

یا

$$\frac{dt}{dr} + \frac{\rho\,\omega^2}{\sigma}\,rt = 0 \qquad (11\text{-}31)$$

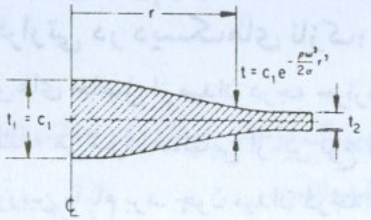
با انتگرال‌گرفتن از این رابطه، t برابر می‌شود با؛

$$t = C_1\,e^{-(\rho\,\omega^2/2\,\sigma)\,r^2} \qquad (11\text{-}32)$$

با استفاده از شرط مرزی $t = t_1$ در $r = o$، شکل (10 -11)، $C_1 = t_1$ خواهد شد.

مثال 7 -11

یک دیسک فولادی، مشابه دیسک مثال 5 -11، با شعاع خارجی $b = 0.25$ m و سرعت 6900 rpm باید با تنش یکنواخت طراحی شود. ضخامت دیسک در مرکز $t_1 = 0.075$ و در لبه خارجی $t_2 = 0.015$ m می‌باشد. تنش و پروفیل دیسک را بدست آورید.



شکل (10 -11)

حل ـ از رابطه (32 -11) نتیجه می‌شود؛

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{c_1\,e^{-(\rho\,\omega^2/2\,\sigma)\,b^2}}{c_1} = e^{-(\rho\,\omega^2/2\,\sigma)\,b^2} = \frac{1}{5}$$

$$\ln\ \frac{1}{5} = -\rho\,\frac{\omega^2}{2\,\sigma}\,b^2 \quad \text{و} \quad \sigma = \rho\,\frac{\omega^2\,b^2}{3.218} = 0.0194\,\rho\,\omega^2 = 79.08\ \text{MPa}$$

درنتیجه؛

$$t = C\,e^{-(\rho\,\omega^2/2\,\sigma)\,r^2} = 0.075\ \ e^{-25.752\ \ r^2}$$

با مراجعه به مثال 6 -11، تنش ماگزیمم برابر $0.0294\,\rho\,\omega^2$ بود. دیده می‌شود که دیسک با تنش یکنواخت از دیسک با پروفیل هذلولی با سوراخ کوچکی در مرکز 34% مقاومتر است.

در عمل طرح و ساخت دیسک توپر با تنش کاملاً یکنواخت مشکل است. از طرف دیگر در دیسک توخالی، اگر شرایط مرزی تنش شعاعی در داخل و خارج برابر صفر، اعمال شود، σ_r و σ_θ همه جا صفر خواهند شد. واضح است که این حالت نتیجه مفیدی برای بحث فوق نخواهد بود. به این علت دیسک با ضخامت متغیر و پروفیل هذلولی

معمولاً در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

11-9 تنش‌های حرارتی در دیسک‌های نازک؛

در این قسمت تنش‌های حاصل از میدان درجه حرارت شعاعی T (r) که مستقل از بعد محوری است مطالعه می‌شود. مثالهایی از این نوع در عمل فراوان است و ازجمله می‌توان دیسک‌های توربین را نام برد. چون میدان درجه حرارت نسبت به محور متقارن است، می‌توان فرض کرد که تنش‌ها و تغییرمکان نیز مثل حالت بحث شده در قسمت 11-1 بوده و روابط آن قسمت در این حالت قابل استفاده می‌باشد.

در حالت تنش صفحه‌ای، روابط تنش ـ کرنش از رابطهٔ (4-21) همراه با رابطهٔ (4-30) بصورت زیر درمی‌آید.

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_\theta - (1+\nu)\,\alpha T\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\theta + \nu\,\varepsilon_r - (1+\nu)\,\alpha T\right] \qquad (11\text{-}33)$$

$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$

رابطهٔ تعادل، رابطهٔ (11-2)، نیز در این حالت بصورت زیر خواهد بود؛

$$r\frac{d}{dr}(\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_\theta) + (1-\nu)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = (1+\nu)\,\alpha\, r\,\frac{dT}{dr} \qquad (a)$$

$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$

$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$

با قراردادن رابطهٔ (11-33) در رابطهٔ a، معادله دیفرانسیل زیر برای تغییرمکان شعاعی بدست می‌آید؛

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\,\alpha\,\frac{dT}{dr} \qquad (b)$$

رابطهٔ (b) را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت؛

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right] = (1+\nu)\,\alpha\,\frac{dT}{dr} \qquad (c)$$

با انتگرال گرفتن از این رابطه، u برابر می‌شود با؛

$$u = \frac{(1+\nu)\,\alpha}{r}\int_a^r Tr\,dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \qquad (d)$$

در این رابطه a شعاع داخلی دیسک توخالی است و در حالت دیسک توپر صفر می‌باشد. درضمن ν و α ثابت فرض شده‌اند.

$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$

$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$

دیسک توخالی؛

تنش‌های شعاعی و محیطی دیسک توخالی با قراردادن رابطهٔ (d) در رابطهٔ (11-6) بصورت زیر بدست می‌آیند؛

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) - \frac{c_2(1-\nu)}{r^2}\right] \qquad (e)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{r^2}\int_a^r Tr\,dr - \alpha ET + \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) + \frac{c_2(1-\nu)}{r^2}\right] \qquad (f)$$

ثابت‌های C_1 و C_2 از شرایط مرزی، $(\sigma)_{r=a} = (\sigma)_{r=b} = 0$، و از رابطهٔ (e) برابر می‌شوند با؛

$$C_1 = \frac{(1-\nu)\,\alpha}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,dr \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{(1+\nu)\,a^2\,\alpha}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,dr$$

درنتیجه تنش‌ها برابر خواهند شد با؛

$$\sigma_r = \alpha E\left[-\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + \frac{r^2-a^2}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b Tr\,dr\right]$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[-T + \frac{1}{r^2} \int_a^r Tr\,dr + \frac{r^2 + a^2}{r^2 (b^2 - a^2)} \int_a^b Tr\,dr \right]$$

دیسک توپر؛

در دیسک توپر تغییرمکان در $r = 0$ باید صفر باشد. در اینصورت $C_2 = 0$ خواهد شد. برای محاسبه C_1 از شرط $(\sigma_r)_{r=b} = 0$ استفاده می‌شود. با استفاده از این شرط از رابطهٔ (e)، C_1 برابر خواهد شد با؛

$$C_1 = \frac{(1 - \nu)\,\alpha}{b^2} \int_0^b Tr\,dr$$

با قراردادن ثابت‌های C_1 و C_2 در روابط (e) و (f)، تنش‌ها در دیسک توپر برابر می‌شوند با؛

$$\sigma_r = \alpha E \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b Tr\,dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr\,dr \right]$$

(11- 35)

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[-T + \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr\,dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr\,dr \right]$$

با داشتن توزیع درجه حرارت $T\,(r)$، تنش‌ها در دیسک توپر و توخالی از روابط (11-35) بدست می‌آیند.

11-10 تنش حرارتی در استوانه‌های بلند؛

یک پوسته استوانه‌ای بلند با شرایط دو انتها طوری درنظر گرفته می‌شود که $w = 0$ باشد. دراینصورت $\varepsilon_z = 0$ بوده وحالت پوسته‌کرنش صفحه‌ای‌است. روابط تنش - کرنش از قانون هوک بصورت زیر درمی‌آید؛

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T$$

چون $\varepsilon_z = 0$ است از رابطهٔ آخر نتیجه می‌شود؛

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) - \alpha ET \qquad \text{(a)}$$

با قراردادن رابطهٔ (a) در دو ترم اول رابطهٔ (11-36)، نتیجه خواهد شد؛

$$\varepsilon_r = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_r - \nu \sigma_\theta + \alpha ET]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu \sigma_r + \alpha ET]$$

باتوجه به اینکه روابط (11-2) و (11-3) در این حالت صادق هستند، با روشی مشابه قسمت 11-9، u، σ_r و σ_θ بصورت زیر بدست می‌آیند؛

$$u = \frac{(1 + \nu)\,\alpha}{(1 - \nu)\,r} \int_a^r Tr\,dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \qquad \text{(c)}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \nu} \left[-\frac{(1 + \nu)\,\alpha}{(1 - \nu)\,r^2} \int_a^r Tr\,dr + \frac{C_1}{1 - 2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right] \qquad \text{(d)}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr}$$

درضمن از رابطهٔ (a)، σ_z نیز برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_z = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} + \frac{2\nu EC_1}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \qquad \text{(f)}$$

استوانهٔ توپر؛

برای اینکه تغییرمکان شعاعی در $r = 0$ صفر گردد، ثابت C_2 در رابطهٔ (c) باید صفر باشد. با استفاده از شرط مرزی $(\sigma_r)_{r=b} = 0$ ، از رابطهٔ (d) ثابت C_1 برابر خواهد شد با؛

$$C_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\,\alpha}{(1-\nu)\,b^2} \int_0^b Tr\,dr \qquad \text{(g)}$$

توزیع تنش از روابط (d) ، (e) و (f) باتوجه به ثابت‌های بدست آمده بصورت زیر خواهد بود؛

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left[\frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,dr - \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,dr\right] \qquad \text{(11-37)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left[-T + \frac{1}{b^2}\int_0^b Tr\,dr + \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,dr\right] \qquad \text{(11-38 a)}$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left[\frac{2\nu}{b^2}\int_0^b Tr\,dr - T\right]$$

تنش طولی طبق رابطهٔ (11-38 a) وقتی صادق است که دو انتهای استوانه ثابت باشند. درحالتی که دو انتها آزاد هستند، یک تنش یکنواخت $\sigma_z = S_\circ$ باید به سیستم طوری اضافه شود که نتیجه نیروها در هر انتها صفر شود. درنتیجه؛

$$S_\circ \pi b^2 - \int_0^b \sigma_z (2\pi r)\,dr = 0$$

از این رابطه همراه با رابطهٔ (f) نتیجه خواهد شد؛

$$S_\circ = \frac{2\alpha E}{b^2(1-\nu)}\int_0^b Tr\,dr - \frac{2\nu E C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \text{(h)}$$

تنش طولی در استوانه دوسر آزاد با اضافه‌کردن $S_\circ$ به تنش داده شده توسط رابطهٔ (f) برابر می‌شود با؛

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2}\int_0^b Tr\,dr - T\right) \qquad \text{(11-38 b)}$$

در اینحالت تنش‌های σ_r و σ_θ همان مقادیر قبلی خواهند بود. تغییرمکان طولی با اضافه‌کردن تغییرمکان در اثر تنش یکنواخت محوری $S_\circ$ ، $U_\circ = -\nu S_\circ r/E$ ، بطرف راست رابطهٔ (c) بدست می‌آید.

استوانهٔ توخالی؛

در استوانه توخالی وقتی دو سطح داخلی و خارجی بدون بار هستند، شرایط مرزی بصورت $(\sigma_r)_{r=a} = (\sigma_r)_{r=b} = 0$ می‌باشد. با اعمال این شرایط در رابطهٔ (d) ، ثابت‌ها برابر خواهند شد با؛

$$C_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\,\alpha}{(1-\nu)(b^2-a^2)}\int_0^b Tr\,dr - \nu\,\varepsilon_z$$

$$C_2 = \frac{(1+\nu)\,a^2\,\alpha}{(1-\nu)(b^2-a^2)}\int_0^b Tr\,dr \qquad \text{(i)}$$

از روابط (d) ، (e) و (f) باتوجه به مقادیر ثابت (i) ، تنش‌ها برابر می‌شوند با؛

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + \frac{(r^2-a^2)\,\alpha}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b Tr\,dr\right] \qquad \text{(11-39)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu}\left[-T + \frac{\alpha}{r^2}\int_a^r Tr\,dr + \frac{(r^2-a^2)\,\alpha}{r^2(b^2-a^2)}\int_a^b Tr\,dr\right]$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left[\frac{2\nu}{b^2-a^2}\int_a^b Tr\,dr - T\right] \qquad \text{(11-40 a)}$$

در حالت دو انتها آزاد، با روشی مشابه استوانه توپر، تنش طولی برابر خواهد شد با؛

$$\sigma_z = \frac{\alpha E}{1-\nu}\left[\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b Trdr - T\right] \qquad (11-40\ b)$$

با داشتن توزیع درجه حرارت $T(r)$، تنش‌ها و تغییرمکان از روابط فوق بدست می‌آیند.

مثال 8 -11

توزیع تنش در یک استوانه توخالی تحت درجه حرارتهای ثابت در سطوح داخلی و خارجی بدست آورید.

حل - جریان حرارت از قسمت دلخواهی از سطح داخلی استوانه، طبق قانون هدایت فوریه[1]، بصورت زیر است؛

$$Q = -2\pi r K \frac{dT}{dr} \qquad (i)$$

که در آن Q جریان حرارت بر واحد طول محوری، و K هدایت حرارتی است. با فرض اینکه Q و K ثابت هستند؛

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{2\pi K} = \text{constant} = C$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه نتیجه می‌شود؛

$$T = C_1\int\frac{dr}{r} + C_2 = C_1\ l_n\, r + C_2 \qquad (k)$$

با اعمال شرایط مرزی، $(T)_{r=a} = T_1$ و $(T)_{r=b} = T_2$، رابطهٔ (k) را می‌توان بصورت زیر نوشت؛

1 - Fourier's law of conduction

$$T = \frac{T_2\ln(r/a) + T_1\ln(b/r)}{\ln(b/a)} = \frac{T_1 - T_2}{\ln(b/a)}\ln\frac{b}{r} \qquad (11-41)$$

با قراردادن T از رابطهٔ (11-41) در روابط (11-39) و (11-40 a)، تنش‌ها بصورت زیر بدست می‌آیند؛

$$\sigma_r = \frac{\alpha E(T_1-T_2)}{2(1-\nu)\ln(b/a)}\left[-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2(r^2-b^2)}{r^2(b^2-a^2)}\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E(T_1-T_2)}{2(1-\nu)\ln(b/a)}\left[1-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2(r^2+b^2)}{r^2(b^2+a^2)}\ln\frac{b}{a}\right] \qquad (11-42)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E(T_1-T_2)}{2(1-\nu)\ln(b/a)}\left[1-2\ln\frac{b}{r} - \frac{2a^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right]$$

باید توجه داشت که برای $\nu = O$، رابطهٔ (11-51) حلی برای دیسک نازک توخالی است. درحالتی که جریان حرارت بطرف خارج است، $T_1 > T_2$، از رابطهٔ (11-42) نتیجه می‌شود که تنش‌های σ_θ و σ_z روی سطح داخلی فشاری (منفی) بوده، و روی سطح خارجی کششی (مثبت) خواهند بود. ماگزیمم مقدار آنها در سطوح داخلی و خارجی می‌باشد. ازطرف دیگر تنش σ_r در تمام نقاط فشاری است، و روی دو سطح داخلی و خارجی صفر خواهد بود.

در عمل معمولاً علاوه بر تنش‌های حرارتی، بار فشاری نیز به پوسته وارد می‌شود. روش تحلیل مشابه روش فوق است و در اینصورت باید از شرط مرزی‌های، $(\sigma_r)_{r=a} = -P_i$ و $(\sigma_r)_{r=b} = 0$، استفاده کرد. در این حالت، در اثر فشار داخلی، تنش محیطی کششی خواهدبود، شکل(11-3a)،وباعث حذف‌تنش‌فشاری دراثر درجه‌حرارت‌می شود.

در مورد دیسک دوّار، وقتی بار دورانی باتوزیع درجه‌حرارت متقارن شعاعی، $T(r)$، همراه است. تنش‌ها و تغییرمکانها را می‌توان از ترکیب دو راه حل بدست آورد.

مسائل بخش یازدهم

11- 1

یک استوانه به شعاع داخلی a و شعاع خارجی $b = 1.1\,a$: (a) فقط فشار داخلی P_i، و (b) فقط فشار داخلی P_o، قرار دارد. در هر دو حالت نسبت تنش‌های محیطی ماگزیمم به می‌نیمم را پیدا کنید.

11- 2

یک استوانه به شعاع داخلی a و شعاع خارجی na (n عدد صحیح است) برای تحمل فشار داخلی بخصوصی طراحی شده است. به علتی لازم شده است داخل استوانه تراش داده شود (شعاع داخلی تغییر نماید).

(a) شعاع داخلی جدید r_x را طوری محاسبه کنید که تنش محیطی ماگزیمم از مقدار قبلی بیشتر از $\Delta\,\sigma_\theta$ نشود. فشار داخلی همان مقدار قبلی می‌باشد.

(b) اگر $a = 25$ mm ، $n = 2$، و پس از سوراخکاری مجدد تنش محیطی باندازهٔ 10% ازدیاد یابد، قطر جدید چقدر است؟

11- 3

یک مخزن فولادی به قطر داخلی 1.2 m تحت فشار داخلی 7 MPa قرار دارد. مقاومت کششی و فشاری جسم 280 MPa است. با درنظر گرفتن ضریب اطمینان برابر 2، ضخامت دیواره را بدست آورید.

11- 4

دو استوانه جدار ضخیم دو سربسته با ابعاد یکنواخت بترتیب تحت فشار داخلی و خارجی قرار دارند. قطر خارجی هر کدام دو برابر قطر داخلی است. نسبت فشارها در حالت‌های زیر چقدر است؟

(a) قدر مطلق ماگزیمم تنش محیطی در دو استوانه برابر است.

(b) قدر مطلق ماگزیمم کرنش محیطی در دو استوانه برابر می‌باشد. $\nu = \frac{1}{3}$ است.

11- 5

تغییرمکان شعاعی نقطه‌ای روی سطح داخلی پوستهٔ مسأله 3 -11 را پیدا کنید. فرض کنید:

قطر خارجی $2\,b = 1.2616$ m , $E = 200$ Gpa , $\nu = 0.3$

11- 6

عبارتی برای ماگزیمم کرنش محیطی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فقط فشار داخلی P_i در دو حالت زیر بدست آورید: (a) استوانه دوسر باز است، و (b) استوانه دوسر بسته است.

سپس با فرض، کرنش مجاز برابر $1000\,\mu$، $P_i = 60$ MPa، و $b = 2$ m ضخامت پوسته را محاسبه نمائید. فرض کنید $E = 200$ Gpa و $\nu = \frac{1}{3}$ است.

11- 7

یک استوانه فولادی به شعاع 0.3 m روی یک محور استوانه‌ای توپر به شعاع 0.1 m جا زده شده است. جاذدن مجاز 0.001 m / m می‌باشد. فشار خارجی P_o روی استوانه را طوری بدست آورید که تنش محیطی کششی در داخل استوانه را به صفر برساند. فرض کنید $E_s = 200$ Gpa است.

11- 8

یک پوسته استوانه فولادی فقط تحت فشار داخلی قرار دارد. (a) اگر فشار داخلی سه چهارم ماگزیمم تنش محیطی مجاز باشد، نسبت ضخامت دیواره به قطر داخلی را پیدا کنید. (b) برای استوانه‌ای به قطر داخلی 0.15 m تحت فشار داخلی 6.3 MPa، ازدیاد قطر داخلی را محاسبه نمائید. فرض کنید $E = 210$ Gpa و $\nu = \frac{1}{3}$ است.