# مقاومت مصالح ۳

## فصل سوم

## روابط تنش و کرنش

### شماره۱:قسمت a

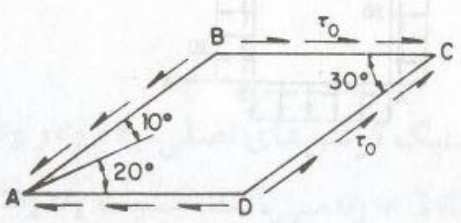
**3-1**

یک ورق نازک مطابق شکل تحت تنش برشی یکنواخت $\tau_0 = 70$ MPa قرار دارد. اگر $E=200$ GPa، $\nu = 0.3$، $AB = 40_{mm}$ و $BC = 60_{mm}$ باشد؛

(a) تغییر طول AB را بدست آورید.

(b) تغییر طول قطرهای AC و BD چقدر است؟

(c) کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را پیدا کنید.




شکل (م 3-1)

## شماره۲:

**3-2**

یک نمونه به قطر 12 میلیمتر تحت بار کششی قرار گرفته است. در اثر بار 9KN، تغییر طول میله برای $L= 75_{mm}$ ، $0.025_{mm}$ است. تنش‌ها و کرنش‌های حقیقی و مهندسی چقدر هستند؟ مدول الاستیسیته را بدست آورید.

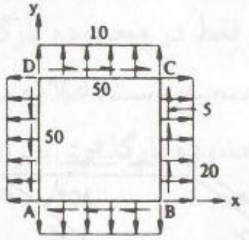
## شماره۳:قسمت a

**3-3**

یک ورق مربع شکل به ضلع 50 میلیمتر تحت تنش (برحسب مگاپاسکال) مطابق شکل قرار دارد. تغییر قطر BD چقدر است؟ جواب رابرحسب E بدست آورده و مسأله را از دو روش زیر حل کنید؛

(a)کرنش در جهت‌های x و y را بدست آورده، و سپس از روابط انتقال کرنش استفاده کنید.

(b) تنش روی صفحات موازی و عمود بر BD را بدست آورده، و سپس از قانون کلی هوک استفاده نمائید.




شکل (م 3-3)

**شماره۴:**

**3-4**

برای یک فولاد E=200 GPa و G=80 است. اگر حالت کرنش در نقطه‌ای از جسم به صورت زیر باشد؛

$$\begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 400 \\ 0 & 400 & 0 \end{bmatrix} \mu$$

اجزاء تانسور تنش مربوط به آن را پیدا کنید.

شماره۵:

**3-5**

برای یک جسم با G=80 GPa و E=200 GPa، تانسور کرنش را برای حالت تنش زیر بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 20 & -4 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

شماره۶:

**3-6**

توزیع تنش در یک قطعه آلومینیومی (برحسب مگاپاسکال) به صورت زیر است؛

$\sigma_x = y + 2z^2$ $\quad \tau_{xy} = 3z^2$

$\sigma_y = x + z$ $\quad \tau_{yz} = x^2$

$\sigma_z = z + y$ $\quad \tau_{xz} = zy^2$

حالت کرنش در نقطه (1,2,4) را پیدا کنید. E=70 GPa و $\nu = 0.3$ است.

شماره۷:

**3-7**

در یک نقطه از جسم الاستیک کرنش‌های اصلی $\varepsilon_1$، $\varepsilon_2$ و $\varepsilon_3$ به نسبت 3:4:5 هستند. بزرگترین تنش اصلی $\sigma_1$= 140 MPa می‌باشد. نسبت $\sigma_3:\sigma_2:\sigma_1$ و مقادیر $\sigma_2$ و $\sigma_3$ را بدست آورید. در این جسم E=200 GPa و $\nu$=0.3 است.

شماره۸:

**3-8**

میدان تنش در یک جسم الاستیک به صورت زیر است؛

$$\begin{bmatrix} ky^2 & 0 \\ 0 & -kx^2 \end{bmatrix}$$

که در آن k مقدار ثابتی است. عبارتهائی برای u(x,y) و v(x,y) در جسم بدست آورید.

شماره۹:

**3-9**

روابط زیر را بین ثابتهای الاستیک بدست آورید؛

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3k}{9K-E}$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} = 2G(1+\nu) = 3K(1-2\nu) = \frac{9KG}{3K+G}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{3K - 2G}{2(3K+G)} = \frac{3K-E}{6K}$$

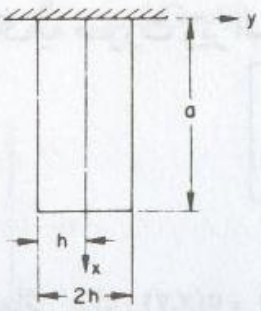
شماره ۱۰:

**3-10**

یک میله منشوری و نازک به وزن مخصوص $\gamma$ و سطح مقطع ثابت مطابق شکل در صفحه قائم آویزان است. در اثر وزن میله، میدان تغییر مکان به صورت زیر است؛

$$u = \frac{\gamma}{2E}(2xa - x^2 - \lambda x^2) \quad , \quad v = -\frac{\nu\gamma}{E}(a - x)\, y$$

تغییر مکان و تنش در جهت z قابل صرفنظر کردن است. **مؤلفه‌های** کرنش و تنش در میله را بدست آورید. آیا شرایط مرزی باتوجه به تنش‌های بدست آمده ارضاء می‌شود؟




شکل (م 3-10)

شماره۱۱:

**3-11**

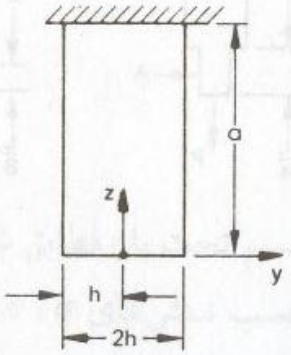
یک میله یکنواخت با سطح مقطع 2h×b روزن مخصوص $\gamma$ در سطح قائم مطابق شکل آویزان است. در اثر وزن میله تغییر مکانها به صورت زیر است؛

$$u = -\frac{\nu\gamma}{E} xz$$

$$v = -\frac{\nu\gamma}{E} yz$$

$$w = \frac{\gamma}{2E} [ (z^2 - a^2) + \nu (x^2 + y^2) ]$$

نشان دهید که این حل پانزده رابطه الاستیسیته و شرایط مرزی را ارضاء می‌کند.




شکل (م 3-11)

شماره۱۲:

**3-12**

یک میله با سطح مقطع یکنواخت A ، مدول الاستیسیته E ، و طول L در انتهای سمت راست ثابت شده و در انتهای آزاد دو بار محوری $P_1$ و $P_2$ را تحمل می‌کند. نشان دهید که انرژی کرنشی کلی ذخیره شده در میله برابر است با؛

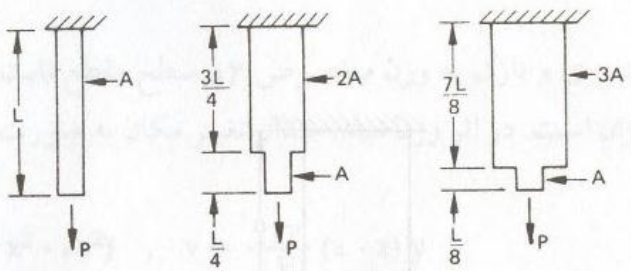
$$U = \frac{P_1^2 L}{2AE} + \frac{P_2^2 L}{2AE} + \frac{P_1 P_2 L}{AE}$$

توجه داشته باشید که U جمع انرژی کرنشی بارهای $P_1$ و $P_2$ وقتی بطور جداگانه به میله وارد می‌آیند نیست. اجزاء انرژی کرنشی را برای حالت $P_1 = P_2 = P$ و $\nu=0.25$ بدست آورید.

شماره۱۳:

**3-13**

سه میله با حجم‌های متفاوت مطابق شکل تحت بار P قرار دارند. میله اول در تمام طول L سطح مقطع یکنواخت A دارد. از تمرکز تنش صرفنظر نموده، انرژی کرنشی سه میله را مقایسه نمائید.




شکل (م 3-13)

شماره۱۴:

**3-14**

یک تیر با مقطع چهارگوش، به ارتفاع h، عرض b و طول L، روی تکیه‌گاه ساده قرار گرفته و بار گسترده یکنواختی به شدت P را تحمل می‌کند. نشان دهید که بیشترین دانسیته انرژی کرنشی برابر است با؛

$$U_0 = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

که در آن U انرژی کرنشی میله و V حجم آن است.

شماره۱۵:

**3-15**

حالت تنش در نقطه‌ای به صورت زیر است؛

$$\begin{bmatrix} 200 & 20 & 10 \\ 20 & -50 & 0 \\ 10 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

این آرایه را به دو دسته تنش‌های انبساطی و تنش‌های تغییر شکل تجزیه کنید. مقدار تنش‌های اصلی حالت تغییر شکل را بدست آورید.

شماره۱۶:

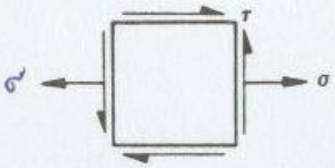
**3-16**

میله‌ای فولادی به قطر $100_{mm}$ در دو انتها تحت کوپل 20 KN.m قرار دارد. در نقطه‌ای از سطح میله دانسیته انرژی کرنشی تغییر حجم و تغییر شکل را بدست آورید. در این میله $E = 200\ GPa$ و $\nu = 0.25$ است.

شماره۱۷:

**3-17**

حالت تنش در نقطه‌ای از یک جسم تحت بار مطابق شکل است. دانسیته انرژی انبساطی و انرژی تغییر شکل را برحسب تنش‌های $\sigma$، $\tau$، و ثابتهای الاستیک E و $\nu$ بدست آورید.




شکل (م 3-17)

شماره۱۸:

**3-18**

یک میله استوانه‌ای کنسول در انتهای آزاد تحت نیروی محوری N و کوپل پیچشی $M_t$ قرا ردارد. طول میله L، شعاع میله r، و مدول الاستیسیته آن E است. انرژی کرنشی کلی میله و اجزاء آن را بدست آورید.

فرض کنید $\nu = \frac{1}{4}$ است.

شماره۱۹:

**3-19** A square plate with 800-mm sides parallel to the $x$ and $y$ axes has a uniform thickness $h = 10$ mm and is made of an isotropic steel ($E = 200$ GPa and $\nu = 0.29$). The plate is subjected to a uniform state of stress. If $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ (plane stress), $\sigma_{xx} = \sigma_1 = 500$ MPa, and $\epsilon_{yy} = 0$ for the plate, determine $\sigma_{yy} = \sigma_2$ and the final dimensions of the plate, assuming linearly elastic conditions.

شماره۲۰:

**3-21** A triaxial state of principal stress acts on the faces of a unit cube. Show that these stresses will not produce a volume change if $\nu = 1/2$. The material is a linearly elastic isotropic material. If $\nu \neq 1/2$, show that the condition necessary for the volume to remain unchanged is for $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

شماره۲۱:

**3-22** A member is made of an isotropic linearly elastic aluminum alloy ($E = 72.0$ GPa and $\nu = 0.33$). Consider a point in the free surface that is tangent to the $(x, y)$ plane. If $\sigma_{xx} = 250$ MPa, $\sigma_{yy} = -50$ MPa, and $\sigma_{xy} = -150$ MPa, determine the directions for strain gages at that point to measure two of the principal strains. What are the magnitudes of these principal strains?

*Ans.* $\epsilon_1 = 0.00485$ at 0.3927 rad clockwise from $x$ axis,
$\epsilon_2 = -0.00299$

شماره۲۲:

**3-23** A member made of isotropic bronze ($E = 82.6$ GPa and $\nu = 0.35$) is subjected to a state of plane strain ($\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$). Determine $\sigma_{zz}$, $\epsilon_{xx}$, $\epsilon_{yy}$, and $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$, if $\sigma_{xx} = 90$ MPa, $\sigma_{yy} = -50$ MPa, and $\sigma_{xy} = 70$ MPa.

شماره۲۳:

**3-26** The nonzero stress components at a point in a steel member ($E = 200$ MPa, $\nu = 0.29$) are $\sigma_{xx} = 80$ MPa, $\sigma_{yy} = 120$ MPa, and $\sigma_{xy} = 50$ MPa. Determine the principal strains.

شماره۲۴:

**3-28** A steel member ($E = 200$ MPa, $\nu = 0.29$) is subjected to a state of plane stress ($\sigma_{xx} = -80$ MPa, $\sigma_{yy} = 100$ MPa, $\sigma_{xy} = 50$ MPa). Determine the principal stresses and principal strains.

شماره۲۵:

**3-30** The member in Fig. P3.12 is made of an aluminum alloy ($E = 72$ MPa, $\nu = 0.33$), and it has a square cross perpendicular to the plane of the figure. Stress components $\sigma_{xx}$ and $\sigma_{yy}$ are uniformly distributed as shown.

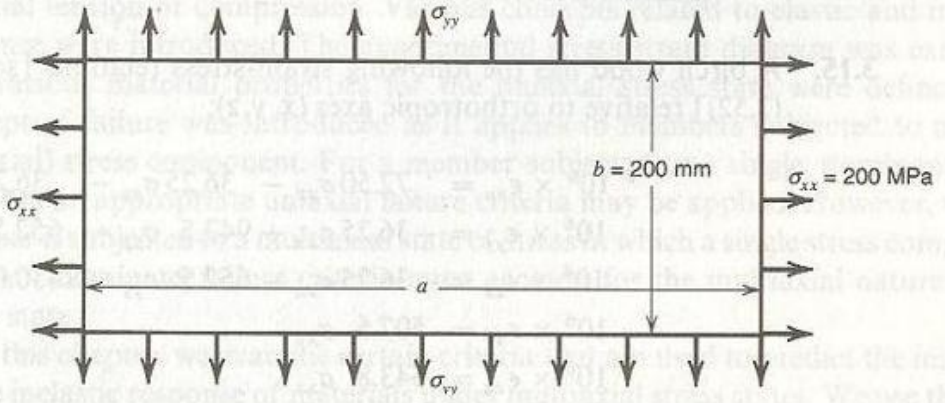



Figure P3.12

**(a)** If $\sigma_{xx} = 200$ MPa, determine the magnitude of $\sigma_{yy}$ so that the dimension $b = 200$ mm does not change under the load.

**(b)** Determine the amount by which the dimension $a$ changes.

**(c)** Determine the change in the cross-sectional area of the member.

شماره۲۶:

**3-30** The member in Fig. P3.12 is made of an aluminum alloy ($E = 72$ MPa, $\nu = 0.33$), and it has a square cross perpendicular to the plane of the figure. Stress components $\sigma_{xx}$ and $\sigma_{yy}$ are uniformly distributed as shown.

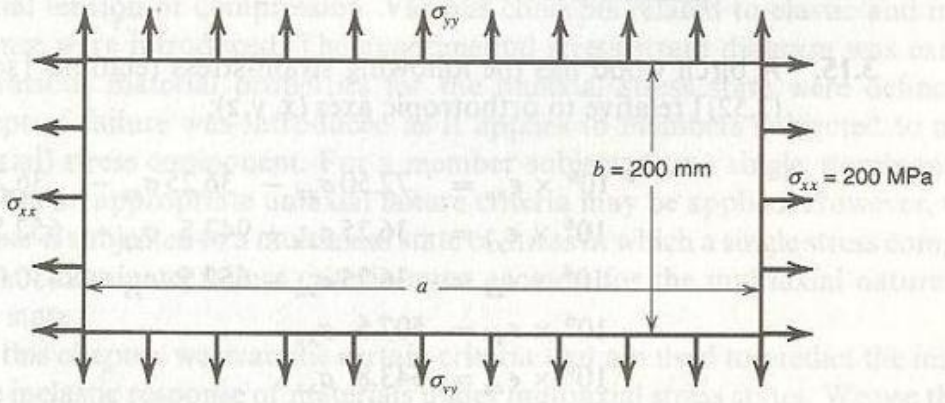



Figure P3.12

**(a)** If $\sigma_{xx} = 200$ MPa, determine the magnitude of $\sigma_{yy}$ so that the dimension $b = 200$ mm does not change under the load.

**(b)** Determine the amount by which the dimension $a$ changes.

**(c)** Determine the change in the cross-sectional area of the member.

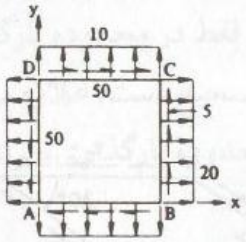
## شماره ۲۷:قسمت b

**3-3**

یک ورق مربع شکل به ضلع 50 میلیمتر تحت تنش (برحسب مگاپاسکال) مطابق شکل قرار دارد. تغییر قطر BD چقدر است؟ جواب رابرحسب E بدست آورده و مسأله را از دو روش زیر حل کنید؛

(a) کرنش در جهت‌های x و y را بدست آورده، و سپس از روابط انتقال کرنش استفاده کنید.

(b) تنش روی صفحات موازی و عمود بر BD را بدست آورده، و سپس از قانون کلی هوک استفاده نمائید.




شکل (م 3-3)

## شماره۲۸:قسمتb

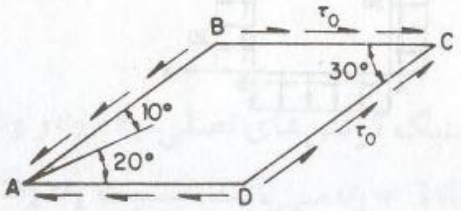
**3-1**

یک ورق نازک مطابق شکل تحت تنش برشی یکنواخت $\tau_0 = 70$ MPa قرار دارد. اگر $E=200$ GPa، $\nu = 0.3$، $AB = 40_{mm}$ و $BC = 60_{mm}$ باشد؛

(a) تغییر طول AB را بدست آورید.

(b) تغییر طول قطرهای AC و BD چقدر است؟

(c) کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را پیدا کنید.




شکل (م 1-3)

**شماره۲۹:قسمتc**

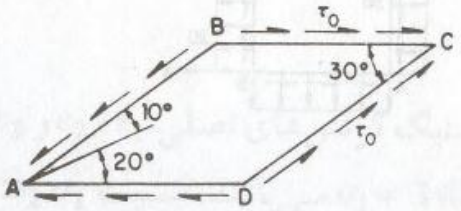
**3-1**

یک ورق نازک مطابق شکل تحت تنش برشی یکنواخت $\tau_0 = 70$ MPa قرار دارد. اگر $E=200$ GPa، $\nu = 0.3$، $AB = 40_{mm}$ و $BC = 60_{mm}$ باشد؛

(a) تغییر طول AB را بدست آورید.

(b) تغییر طول قطرهای AC و BD چقدر است؟

(c) کرنش‌های اصلی و جهت‌های آنها را پیدا کنید.




شکل (م 3-1)