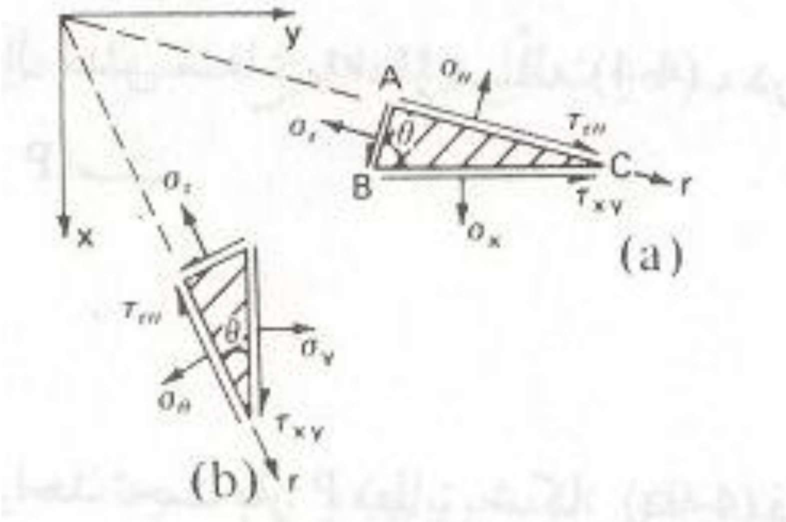
مقاومت۳

فصل چهارم-بخش سوم

روابط قطبی

شماره۱:

نشان دهید که روابط (4-22b) از تعادل نیروهای عمل کننده روی المانهای شکل زیر بدست می‌آیند.



$$\sigma_x = \sigma r \,\mathrm{Cos}^2\theta + \sigma\theta \mathrm{Sin}^2\theta - 2\tau_{r\theta}\,\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta$$

$$\tau_{xy} = (\sigma r - \sigma\theta)\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta + \tau_{r\theta}\,(\mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sin}^2\theta) \qquad (4\text{-}22b)$$

$$\sigma_y = \sigma r \,\mathrm{Sin}^2\theta + \sigma\theta\mathrm{Cos}^2\theta + 2\tau_{r\theta}\,\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta$$

شماره۲:

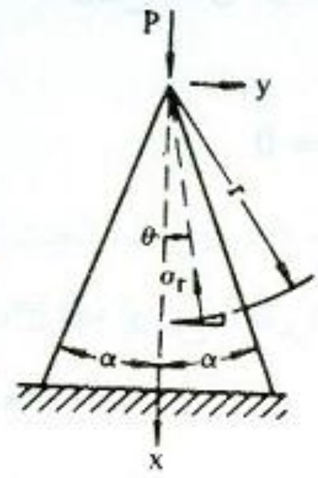
نشان دهید که تابع بی‌هارمونیک $\nabla^4\phi = 0$ در سیستم محورهای قطبی به صورت زیر است؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = 0$$

شماره۳:

فرض کنید که ممان M در گوشه گوه نشان داده شده در شکل (4-9a) وارد می‌آید و P=0 است. برای تابع تنش؛

$$\phi = -\frac{M\,(\mathrm{Sin}2\theta - 2\theta \mathrm{Cos}2\alpha)}{2\,(\mathrm{Sin}2\alpha - 2\alpha \mathrm{Cos}2\alpha)}$$



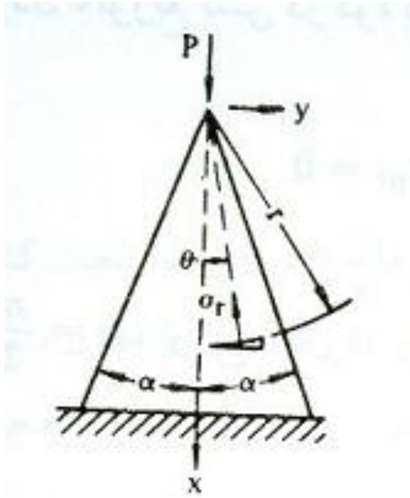
(a)

(a) نشان دهید که ϕ رابطهٔ (4-24) را ارضاء می‌کند.

شماره۴:

فرض کنید که ممان M در گوشه گوه نشان داده شده در شکل (4-9a) وارد می‌آید و P=0 است. برای تابع تنش؛

$$\phi = - \frac{M\ (\mathrm{Sin}2\theta - 2\theta \mathrm{Cos}2\alpha)}{2\ (\mathrm{Sin}2\alpha - 2\alpha \mathrm{Cos}2\alpha)}$$



(a)

(b) عبارتهای؛

$$\sigma_r = \frac{2M\mathrm{Sin}2\theta}{\pi r^2} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = \frac{2M\mathrm{Cos}^2 2\theta}{\pi r^2}$$

میدان تنش در یک صفحه نیم بی‌نهایت $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ را نشان می‌دهند.

شماره۵:

نشان دهید که انتگرال تنش شعاع σ_r، از مسأله (4-4) ، در امتداد هر نیم دایره حول مبدأ (شکل م 4-4) برابر P است.

مسئله۴-۴

نیروی قائم P روی لبه افقی یک سطح نیم بی نهایت به ضخامت واحد مطابق شکل وارد می آید. نشان دهید که با فرض تابع تنش به صورت؛

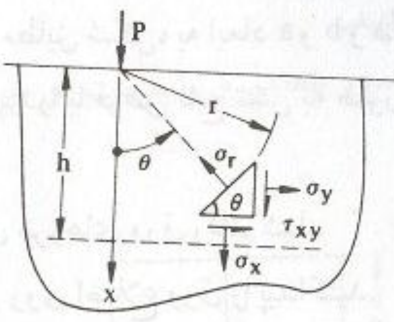
$$\phi = -\frac{P}{\pi} y \, tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

میدان تنش زیر در ورق حکمفرماست؛

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

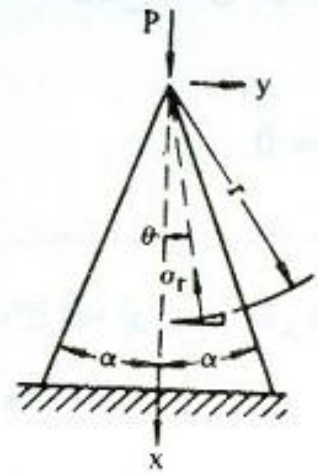
$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

توزیع تنش σ_x و τ_{xy} را در عمق h رسم کنید.



شماره۶:

گوه‌ای به ضخامت واحد تحت بار P مطابق شکل (4-9a) قرار دارد. تنش‌های $\sigma_{x\ max}$ و $\tau_{xy\ max}$ را روی صفحه‌ای به فاصلهٔ h از رأس گوه با استفاده از σ_r طبق رابطهٔ (4-27a) به دست آورید. همچنین حلی با استفاده از تئوری مقدماتی: (a) برای $\alpha = 15^\circ$ و (b) برای $\alpha = 60^\circ$ پیدا کنید. (c) از دو روش تنش‌ها را بدست آورده و مقایسه نمائید.

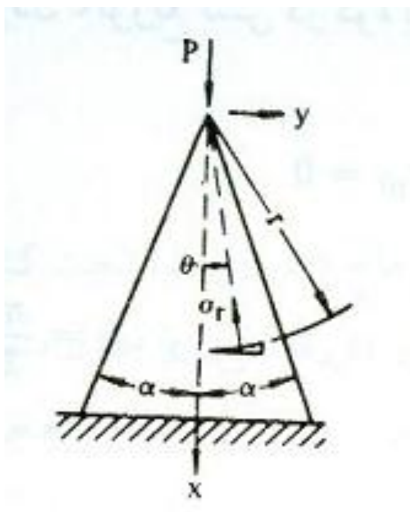


(a)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (4\text{-}27a)$$

شماره۷:

گوه‌ای به ضخامت واحد تحت بار P مطابق شکل (4-9a) قرار دارد. تنش‌های $\sigma_{x\ max}$ و $\tau_{xy\ max}$ را روی صفحه‌ای به فاصلهٔ h از رأس گوه با استفاده از σ_r طبق رابطهٔ (4-27a) به دست آورید. همچنین حلی با استفاده از تئوری مقدماتی: (a) برای $\alpha = 15^\circ$ و (b) برای $\alpha = 60^\circ$ پیدا کنید. (c) از دو روش تنش‌ها را بدست آورده و مقایسه نمائید.

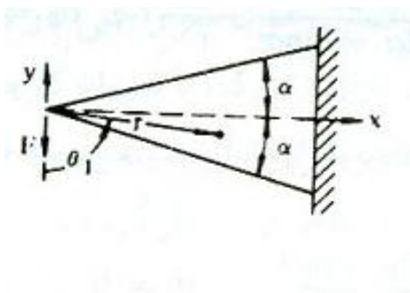


(a)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (4\text{-}27a)$$

شماره۸:

گوه‌ای به ضخامت واحد تحت بار P مطابق شکل (4-9b) قرار دارد. تنش‌های $\sigma_{x\,max}$ و $\tau_{xy\,max}$ را روی صفحه‌ای به فاصلهٔ h از رأس گوه با استفاده از σ_r طبق رابطهٔ (4-27a) به دست آورید. همچنین حلی با استفاده از تئوری مقدماتی: (a) برای $\alpha = 15°$ و (b) برای $\alpha = 60°$ پیدا کنید. (c) از دو روش تنش‌ها را بدست آورده و مقایسه نمائید.

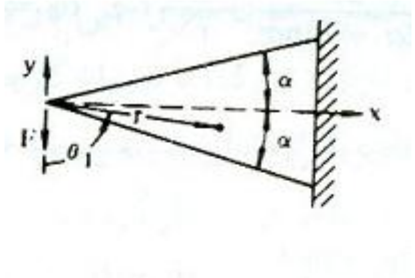


(b)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (4\text{-}27a)$$

شماره۹:

گوه‌ای به ضخامت واحد تحت بار P مطابق شکل (4-9b) قرار دارد. تنش‌های $\sigma_{x\ max}$ و $\tau_{xy\ max}$ را روی صفحه‌ای به فاصلهٔ h از رأس گوه با استفاده از σ_r طبق رابطهٔ (4-27a) به دست آورید. همچنین حلی با استفاده از تئوری مقدماتی: (a) برای $\alpha = 15°$ و (b) برای $\alpha = 60°$ پیدا کنید. (c) از دو روش تنش‌ها را بدست آورده و مقایسه نمائید.



(b)

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha + \mathrm{Sin}\alpha}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (4\text{-}27a)$$

شماره۱۰:

نتایج داده شده توسط روابط (f) و (g) قسمت (4-8) را (a) با نوشتن روابط (d) و (e) به ترتیب به صورت زیر؛

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_1}{dr}\right)\right]\right\} = 0$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left\{ r^3\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(r^2 f_2)\right]\right\}\right) = 0$$

و انتگرال گرفتن از آنها، و (b) با بسط روابط (d) و (e) و قرار دادن $t = l_n r$ و در نتیجه انتقال عبارتها به دو معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت، بدست آورید.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_1}{dr}\right)=0 \qquad (d)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_2}{dr}-\frac{4f_2}{r^2}\right)=0 \qquad (e)$$

$$f_1 = c_1r^2\, l_n r + c_2r^2 + c_3 l_n r + c_4 \qquad (f)$$

$$f_2 = c_5r^2 + c_6r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8 \qquad (g)$$

شماره۱۱:

نتایج داده شده توسط روابط (f) و (g) قسمت (4-8) را (a) با نوشتن روابط (d) و (e) به ترتیب به صورت زیر؛

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_1}{dr}\right)\right]\right\}=0$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left\{ r^3\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(r^2f_2)\right]\right\}\right)=0$$

و انتگرال گرفتن از آنها، و (b) با بسط روابط (d) و (e) و قرار دادن $t = l_n r$ و در نتیجه انتقال عبارتها به دو معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت، بدست آورید.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_1}{dr}\right)=0 \qquad (d)$$

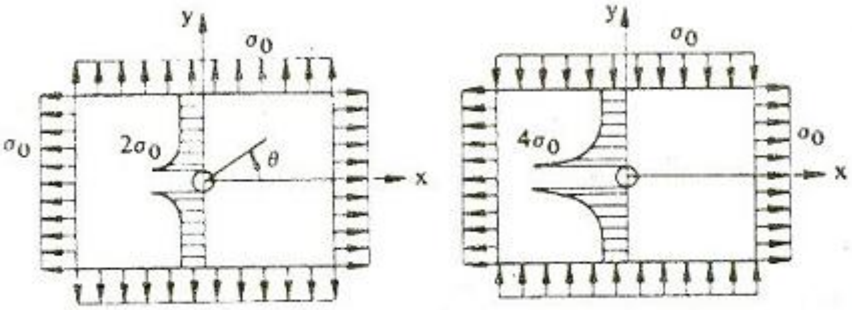
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_2}{dr}-\frac{4f_2}{r^2}\right)=0 \qquad (e)$$

$$f_1 = c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 \tag{f}$$

$$f_2 = c_5 r^2 + c_6 r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8 \tag{g}$$

شماره۱۲:

صحت نتایج نشان داده شده در شکل (4-11) را با استفاده از رابطه (4-28) و روش جایگزینی نشان دهید.



شکل (4-11)

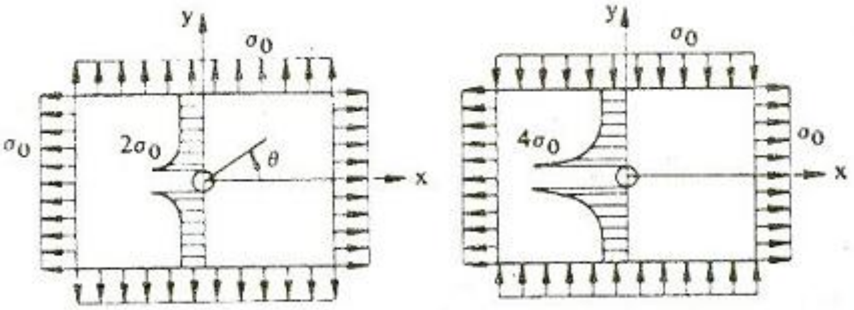
$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_\circ \left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\operatorname{Cos}2\theta \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\circ \left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\operatorname{Cos}2\theta \right] \tag{4-28}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_\circ \left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\operatorname{Sin}2\theta$$

شماره۱۳:

صحت نتایج نشان داده شده در شکل (4-11) را با استفاده از رابطه (4-28) و روش جایگزینی نشان دهید.



شکل (4-11)

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_\circ \left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\text{Cos}2\theta \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_\circ \left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\text{Cos}2\theta \right] \qquad (4\text{-}28)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_\circ \left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\text{Sin}2\theta$$

شماره۱۴:

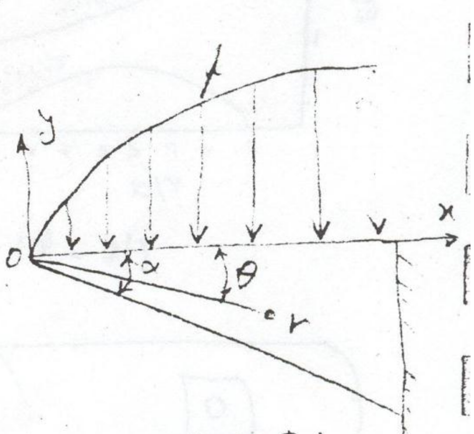
مسئله ۵-۵ یک گوه دو بعدی با مادهٔ کاملاً الاستیک را در نظر بگیرید [شکل (م ۵-۵)]. اگر یک طرف گوه $(\theta = ۰)$ با توزیع فشار عمودی $q(r) = Qr^m$ بارگذاری شده باشد، که Q و m ثابت هستند، و طرف دیگر $(\theta = \alpha)$ بدون تنش باشد، نشان دهید که مسئله را می‌توان با یک تابع تنش آیری به شکل زیر حل نمود. اگر $m \neq ۰$ (m می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد):

$$\phi(r, \theta) = r^{m+۲}[a\cos(m + ۲)\theta + b\sin(m + ۲)\theta + c\cos m\theta + d\sin m\theta] \qquad (۱)$$

اگر $m = ۰$ ،

$$\phi(r, \theta) = kr^۲[- tg\alpha \cos^۲\theta + \frac{۱}{۲} \sin ۲\theta + \alpha - \theta] \qquad (۲)$$

ثابتهای a ، b ، c ، d و k را به دست آورید. پیرامون محدود بودن مؤلفه‌های تنش، σ_r و σ_θ و $\sigma_{r\theta}$ ، شیب، $\partial v/\partial r$ ، و مشتق دوم، $\partial^۲ v/\partial r^۲$ ، در مجاورت نوک گوه، $r \to ۰$ ، بحث کنید. نماد v نمایشگر مؤلفه تغییر مکان در جهت افزایش θ است.



(۴-۱۰۳)

شماره۱۵:

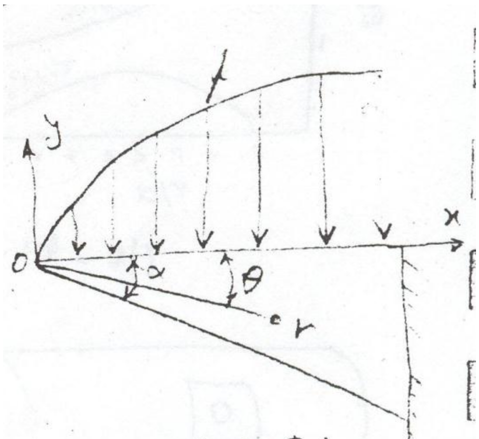
مسئله ۵-۵ یک گوه دو بعدی با مادهٔ کاملاً الاستیک را در نظر بگیرید [شکل (م ۵-۵)]. اگر یک طرف گوه ($\theta = 0$) با توزیع فشار عمودی $q(r) = Qr^m$ بارگذاری شده باشد، که Q و m ثابت هستند، و طرف دیگر ($\theta = \alpha$) بدون تنش باشد، نشان دهید که مسئله را می‌توان با یک تابع تنش آیری به شکل زیر حل نمود. اگر $m \neq 0$ (m می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد):

$$\phi(r, \theta) = r^{m+2}[\, a\cos(m+2)\theta + b\sin(m+2)\theta + c\cos m\theta + d\sin m\theta \,] \tag{1}$$

اگر $m = 0$ ،

$$\phi(r, \theta) = kr^2[\, -\operatorname{tg}\alpha \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \alpha - \theta \,] \tag{2}$$

ثابتهای a ، b ، c ، d و k را به دست آورید. پیرامون محدود بودن مؤلفه‌های تنش، σ_r و σ_θ و $\sigma_{r\theta}$ ، شیب، $\partial v/\partial r$ ، و مشتق دوم، $\partial^2 v/\partial r^2$ ، در مجاورت نوک گوه، $r \to 0$ ، بحث کنید. نماد v نمایشگر مؤلفه تغییر مکان در جهت افزایش θ است.



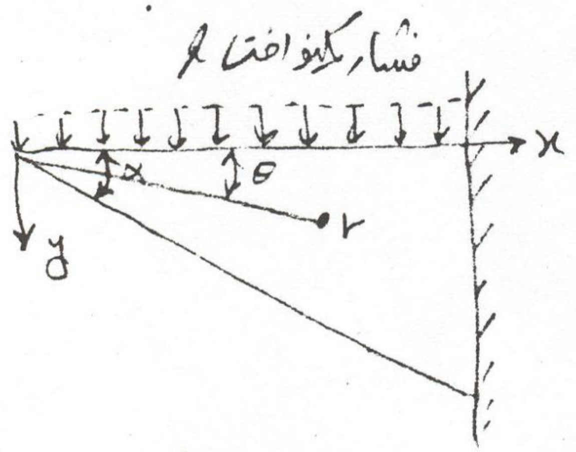
(۴-۱۰۳)

شماره۱۶:

مسئله ۱۰-۵ تابع تنش زیر باید شرایط روی لبه‌های بالا و پایین ورق نشان داده شده در شکل م ۱۰-۵ را ارضا کند:

$$\phi(r, \theta) = c\,[\, r^2(\alpha - \theta) + r\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta\, tg\alpha \,]$$

ثابت c و مؤلفه‌های تغییر مکان را برای نقاط واقع در لبهٔ بالایی محاسبه کنید.



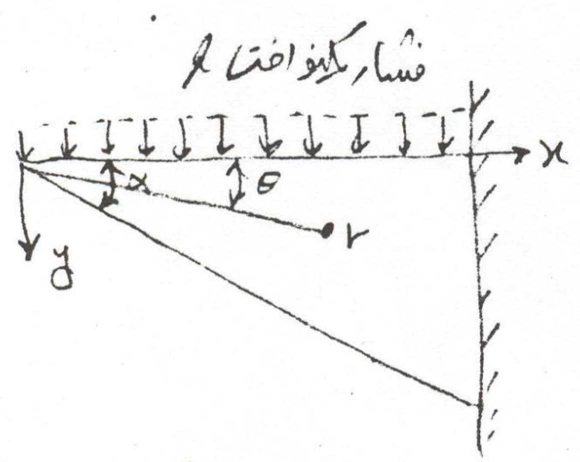
(م ۱۰-۵)

شماره۱۷:

مسئله ۱۰-۵ تابع تنش زیر باید شرایط روی لبه‌های بالا و پایین ورق نشان داده شده در شکل م ۱۰-۵ را ارضا کند:

$$\phi(r\,,\theta) = c\,[\,r^2(\alpha - \theta) + r\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta\,\mathrm{tg}\alpha\,]$$

ثابت c و مؤلفه‌های تغییر مکان را برای نقاط واقع در لبهٔ بالایی محاسبه کنید.



(۵-۱۰م)

شماره۱۸:

مسئله ۱۰-۱ توابع تنش زیر همراه با شرایط مرزی تنش داده شده‌اند. آیا این توابع تنش مجازند؟ نوع بارگذاری را در مرزهای مشخص شده، برای هر حالت محاسبه کنید. c ثابت است.

(الف) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\quad \phi(r\,,\theta) = cr\sin\theta$

(ب) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\quad \phi(r\,,\theta) = cr^2\sin 2\theta$

شماره۱۹:

مسئله ۱۰-۱ توابع تنش زیر همراه با شرایط مرزی تنش داده شده‌اند. آیا این توابع تنش مجازند؟ نوع بارگذاری را در مرزهای مشخص شده، برای هر حالت محاسبه کنید. c ثابت است.

(الف) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\phi(r, \theta) = cr\sin\theta$

(ب) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\phi(r, \theta) = cr^2\sin 2\theta$

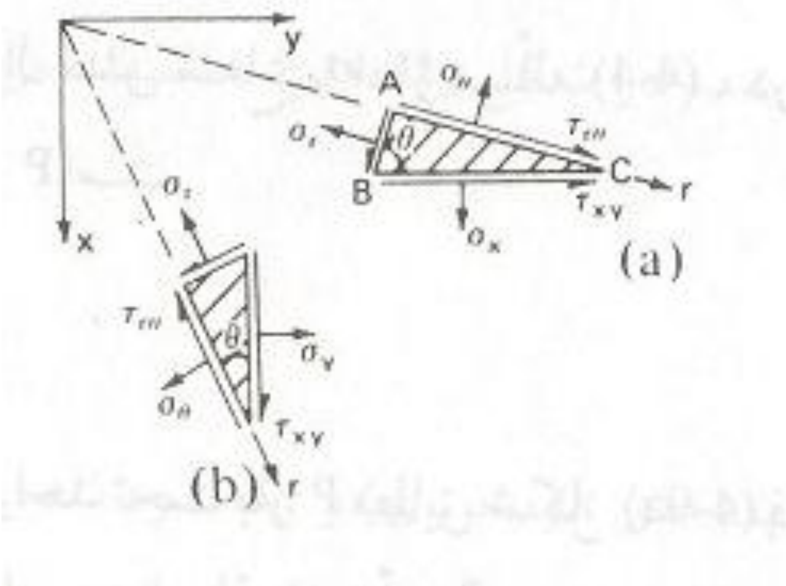
شماره۲۰:

نشان دهید که تابع بی‌هارمونیک $\nabla^4\phi = 0$ در سیستم محورهای قطبی به صورت زیر است؛

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) = 0$$

شماره۲۱:

نشان دهید که روابط (4-22b) از تعادل نیروهای عمل کننده روی المانهای شکل زیر بدست می آیند.



$$\sigma_x = \sigma r \; Cos^2\theta + \sigma\theta Sin^2\theta - 2\tau_{r\theta} \; Sin\theta Cos\theta$$

$$\tau_{xy} = (\sigma r - \sigma\theta) \; Sin\theta \; Cos\theta + \tau_{r\theta} \; (Cos^2\theta - Sin^2\theta) \qquad (4\text{-}22b)$$

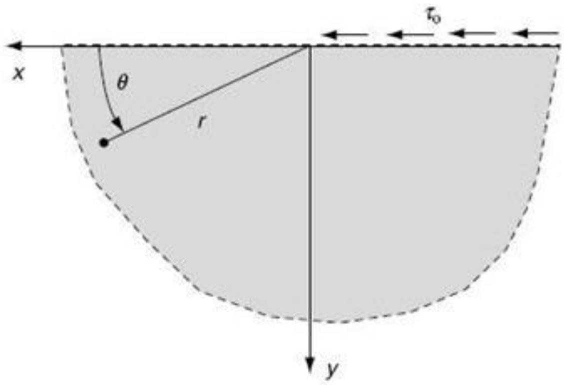
$$\sigma_y = \sigma r \; Sin^2\theta + \sigma\theta Cos^2\theta + 2\tau_{r\theta} \; Sin\theta Cos\theta$$

شماره۲۲:

نشان دهید که تابع تنش

$$\varphi = \frac{\tau_0 r^2}{\pi}\left[\sin^2\theta \log r + \theta \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta\right]$$

حلی برای مسئله صفحه نیمه بینهایت تحت بارگذاری برشی واحد بر روی سطح آزاد $(x \le 0)$،که در شکل زیر نشان داده شده،می باشد. موقعیت تنش های یکسان را نیز مشخص کنید.

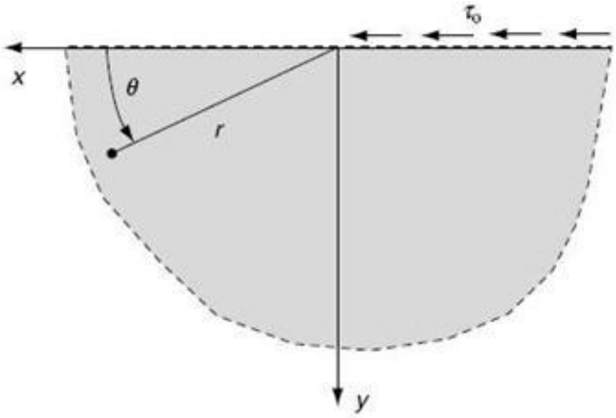


شماره۲۳:

نشان دهید که تابع تنش

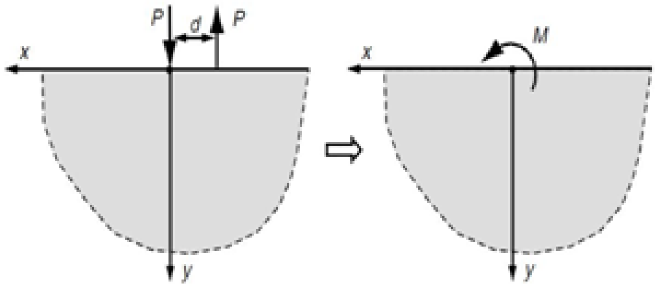
$$\varphi = \frac{\tau_0 r^2}{\pi}\left[\sin^2\theta \log r + \theta \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta\right]$$

حلی برای مسئله صفحه نیمه بینهایت تحت بارگذاری برشی واحد بر روی سطح آزاد $(x \le 0)$،که در شکل زیر نشان داده شده،می باشد. موقعیت تنش های یکسان را نیز مشخص کنید.



شماره۲۴:

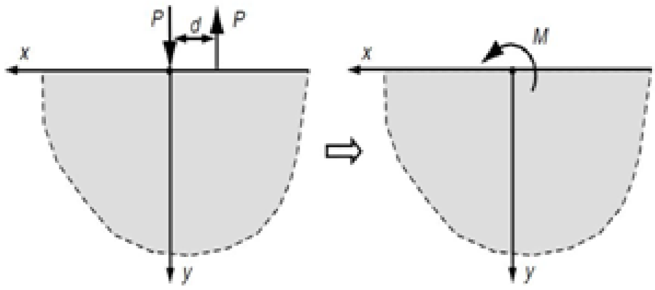
یک سطح نیم متناهی مطابق شکل، تحت یک ممان متمرکز سطحی قرار گرفته است. توزیع تنش را در این شکل تعیین کنید. پیشنهاد می شود از اصل سوپر پوزیشن استفاده کنید. توجه: این حل می تواند توسط روابط در مختصات کارتزین یا قطبی تنش بدست آید.



سطح نیم متناهی با بارگذاری ممان سطحی متمرکز

شماره۲۵:

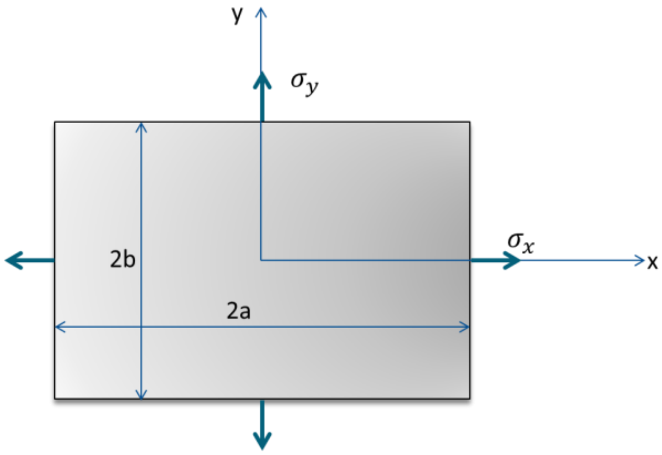
یک سطح نیم متناهی مطابق شکل، تحت یک ممان متمرکز سطحی قرار گرفته است. توزیع تنش را در این شکل تعیین کنید. پیشنهاد می شود از اصل سوپر پوزیشن استفاده کنید. توجه: این حل می تواند توسط روابط در مختصات کارتزین یا قطبی تنش بدست آید.



سطح نیم متناهی با بارگذاری ممان سطحی متمرکز

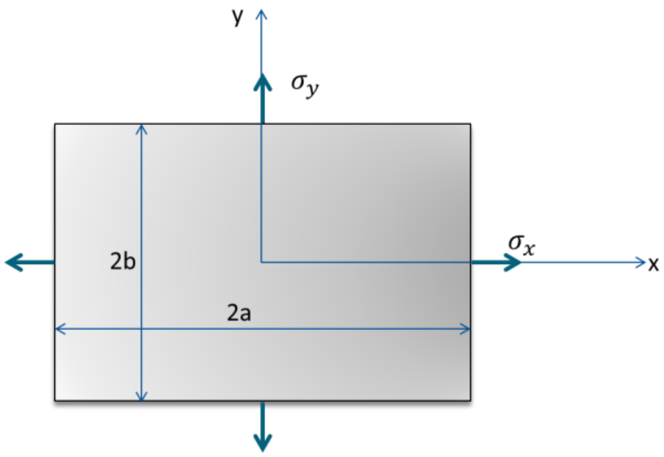
شماره۲۶:

یک ورق نازک تحت تنش دو محوری مطابق شکل قرار دارد. میدان تنش را در دستگاه دکارتی و قطبی بیابید.



شماره۲۷:

یک ورق نازک تحت تنش دو محوری مطابق شکل قرار دارد. میدان تنش را در دستگاه دکارتی و قطبی بیابید.



شماره۲۸:

صفحه نیمه بینهایت زیر تحت بارگذاری یکنواخت عمودی قرار دارد. نشان دهید که ماکزیمم تنش برشی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{p}{\pi}\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

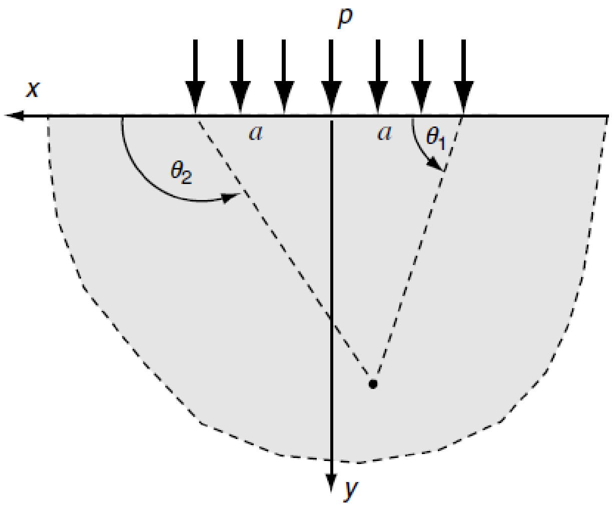


FIGURE 8-24 *Half space under uniform loading over $-a > x > a$.*

شماره۲۹:

صفحه نیمه بینهایت زیر تحت بارگذاری یکنواخت عمودی قرار دارد. نشان دهید که ماکزیمم تنش برشی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{p}{\pi}\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

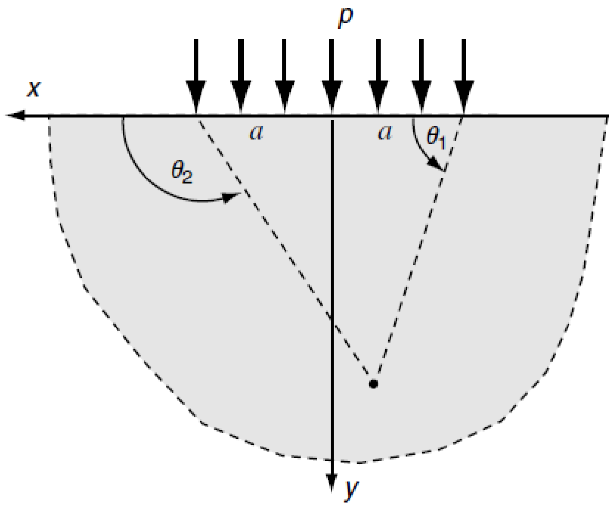


FIGURE 8-24 *Half space under uniform loading over $-a > x > a$.*