به نام خدا

الاستیسیته

مسائل فصل اول: آنالیز تنش

سری ۱:

مسئله ۴-۴ مؤلفه‌های تانسور تنش در یک محور مدور جامد تحت گشتاور خالص، عبارتند از:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -ax_2 \\ 0 & 0 & ax_1 \\ ax_2 & ax_1 & 0 \end{bmatrix}$$

که a ثابت است. بردارهای تنش را در نقطهٔ $P(1, 2, 2)$ برای سطوح زیرین بیابید:

الف ـ صفحه $x_1 = 1$

ب ـ صفحهٔ $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

پ ـ کرهٔ $x_i x_i = 9$

جهت مثبت x_i در هر حالت طرفی است که از مبدأ دور می‌شود.

مسئله ۴-۱۰ تنشهای اصلی را برای حالتهای تنش زیرین بیابید. محور اصلی متناظر با تنش اصلی حداکثر را به دست آورید.

(الف) $\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (MPa)

جواب: (الف) $\sigma_1 = 2a$ ، $\sigma_2 = \sigma_3 = -a$ (ب) $\sigma_1 = 3/37$ ، $\sigma_2 = -2/37$ ، $\sigma_3 = -1/0$

مسئله ۴-۹ اگر t_i و t'_i بردارهای تنش در نقطه P متناظر با یکه بردارهای عمود n_i و n'_i باشند؛ نشان دهید که مؤلفهٔ t_i در جهت n'_i برابر با مؤلفهٔ t'_i در جهت n_i می‌باشد.

مسئله ۴-۱۹ طبق تعریف، فشار هیدرواستاتیک یک سیال، p، عبارت است از $p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ که σ_i تنشهای اصلی هستند. نشان دهید که فشار هیدرواستاتیک یک پایا است.

سری ۲:

مسئله ۴-۲۶ میدان تنش زیر داده شده است:

$$\sigma_{11} = 10x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \sigma_{22} = 15x_1^2 + 50 \qquad \sigma_{33} = 15x_2^2 + 15x_3^2$$

$$\sigma_{12} = 50 + 40x_2^2 \qquad \sigma_{23} = 0 \qquad \sigma_{31} = \frac{1}{2}x_1x_3^2 + 15x_1^2x_2$$

نیروهای حجمی مورد نیاز برای تعادل را بیابید.

جواب: $\rho b_1 = -(30x_1^2 + 40x_2 + \frac{3}{2}x_1x_3^2)$, $\rho b_2 = 0$, $\rho b_3 = -(\frac{1}{2}x_3^2 + 30x_1x_2 + 45x_3^2)$

مسئله ۴-۲ حالت تنش در یک نقطهٔ معین از جسمی با ماتریس زیر نشان داده می‌شود:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{psi}$$

بردار تنش وارد به صفحه‌ای که از نقطهٔ مورد نظر گذشته و موازی صفحهٔ $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ است، را بیابید.

مسئله ۴-۱۱ حالت تنش در یک نقطه از جسم معین عبارتست از:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر پاياهای تنش I_1، I_2 و I_3 و نیز تنشهای اصلی را بیابید.

جواب: $I_1 = 1$، $I_2 = -2$، $I_3 = 0$، $\sigma_1 = 0$، $\sigma_2 = 2$ و $\sigma_3 = -1$.

سری ۳:

مسئله ۴-۲۰ اگر به یک حالت اختیاری تنش، فشار هیدرواستاتیک p افزوده شود، به طوری که تانسور تنش شکل $(\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij})$ را بیابد، ثابت کنید که تنش برشی حداکثر مستقل از p خواهد بود.

مسئله ۴-۶ ماتریس تانسور تنش در یک نقطه از جسم جامد در دستگاه x_i عبارتست از:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(الف) مؤلفه‌های عمودی تنش را در دستگاه x'_i که از دوران محورهای x_i حول محور $x_۱$ به اندازهٔ ۴۵° حاصل می‌شوند، پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که $\sigma'_{ii} = \sigma_{ii}$

مسئله ۴-۱۲ ماتریس تانسور تنس زیر را در نظر بگیرید:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -cx_۲ \\ ۰ & ۰ & cx_۱ \\ -cx_۲ & cx_۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

که c ثابت است. تنشهای اصلی و جهات اصلی را در نقطهٔ (۴ ,۲ ,۱) به دست آورید.

جواب: $\sigma_۱ = ۲\sqrt{۵}$، $\sigma_۲ = ۰$، $\sigma_۳ = -۲\sqrt{۵}$. و $n_i^{(۱)} \left(\pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \pm \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, \mp \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\right)$، $n_i^{(۲)} \left(\pm \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \pm \frac{۱}{\sqrt{۵}}, ۰\right)$، $n_i^{(۳)} \left(\pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \mp \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, \pm \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\right)$

سری ۴:

مسئله ۴-۲۱ نشان دهید که $\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$

که I_2' دومین پایای تنش انحرافی σ' است. توجه شود که مشتق نسبت به σ_{ij} است، نه σ'_{ij}.

مسئله ۴-۲۷ معین کنید که میدانهای تنش زیر در یک سازهٔ الاستیک، میدانهای ممکن هستند. از نیروی حجمی صرفنظر شود.

(الف) $\sigma_{11} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2 + c_3 x_3$ ، $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -c_3(x_2^2/2) - c_1 x_2$ ، $\sigma_{22} = c_4 x_1 + c_1 x_2$

(ب) $\sigma_{11} = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2$ ، $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -x_1 x_2 + x_2^2$ ، $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -x_1 x_3$ ، $\sigma_{22} = x_1^2$ ، $\sigma_{23} = -x_2 x_3$ ،

$\sigma_{33} = (x_1 + x_2)x_2$

(پ) $\sigma_{11} = 3x_1 + 5x_2$ ، $\sigma_{12} = 4x_1 - 3x_2$ ، $\sigma_{22} = 2x_1 - 4x_2$

جواب: (الف) میدان ممکن نیست (مگر $c_1 = 0$)

(ب) ممکن نیست

(پ) ممکن هست

مسئله ۴-۳ حالت تنش در نقطهٔ $(x_{.1}, x_{.2}, x_{.3})$ عبارتست از:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{psi}$$

بردار تنش و مقدار مؤلفه‌های عمودی و برشی آن را روی صفحهٔ $x_1 - x_{.1} + x_2 - x_{.2} + x_3 - x_{.3} = 0$ پیدا کنید.

سری ۵:

مسئله ۴-۱۵ برای حالتهای تنش زیر (الف) تنشهای اصلی و تنش برشی حداکثر را بیابید، (ب) موقعیت صفحه‌ای که تنش کششی حداکثر به آن وارد می شود، پیدا کنید، (پ) پایاهای تنش I_1، I_2 و I_3 را وارسی کنید:

۱- $\sigma_{11} = 50MPa$ ، $\sigma_{22} = 60MPa$ ، $\sigma_{33} = 70MPa$ ، $\sigma_{12} = 100MPa$ ، $\sigma_{22} = 75MPa$ ، $\sigma_{31} = 50MPa$

۲- $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ ، $\sigma_{12} = 75MPa$ ، $\sigma_{22} = 0$ ، $\sigma_{21} = -75MPa$

مسئله ۴-۲۸ میدان تنش زیر داده شده است:

$$\sigma_{11} = -cx_1^2 \quad , \quad \sigma_{12} = -7 + 4x_1x_2 + x_3 \quad , \quad \sigma_{13} = 1 + x_1 - 3x_2$$

$$\propto \quad \sigma_{22} = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 5x_3 \quad , \quad \sigma_{23} = 0 \quad , \quad \sigma_{33} = -5 + x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

(الف) مؤلفه‌های نیروی حجمی را به گونه‌ای محاسبه کنید که میدان تنش یک حالت تعادل را توصیف کند.

(ب) بردار تنش راروی صفحهٔ ثابت $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ در نقطهٔ (x_1 , x_2 , x_3) به دست آورید. مؤلفه‌های عمودی و برشی بردار تنش را در نقطهٔ $(3 , 1 , 1)$ محاسبه کنید.

(پ) تنشهای اصلی و جهات اصلی را در نقطهٔ $(1 , 2 , 1)$ به دست آورید.

جواب: (الف) $\rho b_1 = 0$ ، $\rho b_2 = 0$ ، $\rho b_3 = -4$

(ب) $t_1 = (-2x_1^2 - 6 + 4x_1x_2 + x_3 + x_1 - 3x_2) / \sqrt{3}$ ، $t_2 = (-7 + 4x_1x_2 + 3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_2) / \sqrt{3}$

$t_3 = (2x_1 - 4 + 3x_2) / \sqrt{3}$ ، $t_n = -3/33$ ، $t_s = 8/576$

(پ) $\sigma_1 = -10/5333$ و $n_i^{(1)} (-0/257 , 0/964 , -0/066)$

$\sigma_2 = -3/323$ و $n_i^{(2)} (0/870 , 0/261 , 0/418)$

$\sigma_3 = 6/856$ و $n_i^{(3)} (-0/42 , -0/05 , 0/906)$

مسئله ۴-۷ نشان دهید که

$$\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij} = \sigma_{lm}\,\sigma_{lm}$$

$$\sigma'_{ij}\,\sigma'_{jk}\,\sigma'_{ki} = \sigma_{rs}\,\sigma_{st}\,\sigma_{tr}$$

سری ۶:

مسئله ۴-۱۳ حالت تنش در یک نقطه از جسم جامد الاستیک عبارتست از:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \text{psi}$$

(الف) بردار تنش را روی صفحه‌ای با معادلهٔ $۲x_۱ + x_۲ - x_۳ = ۱$ بیابید.

(ب) تنشهای اصلی را در نقطهٔ مورد نظر به دست آورید.

مسئله ۴-۲۳ برای یک حالت تنش دو بعدی و در غیاب نیروهای حجمی، ثابت کنید که

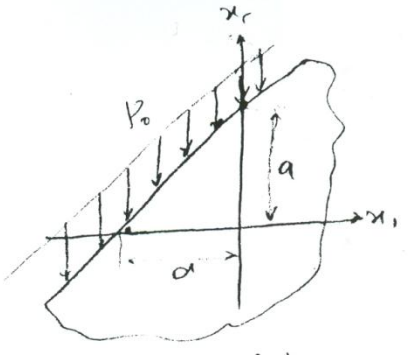
$$\int \frac{\partial \sigma_{۱۱}}{\partial x_۱} dx_۲ = \int \frac{\partial \sigma_{۲۲}}{\partial x_۲} dx_۱$$

مسئله ۴-۲۳ یک جسم الاستیک را در نظر بگیرید که به بخشی از مرز خارجی آن نیروی گسترده و یکنواخت $p_۰$ مطابق با شکل م ۴-۲۳ وارد می‌شود. معادلات کوشی را برای این مرز بنویسید.

پاسخ:

$$۰ = -\sqrt{۲}\,\sigma_{۱۱}(x, x+a) + \sqrt{۲}\,\sigma_{۱۲}(x, x+a)$$

$$-۲p_۰ = -\sqrt{۲}\,\sigma_{۱۲}(x, x+a) + \sqrt{۲}\,\sigma_{۲۲}(x, x+a)$$



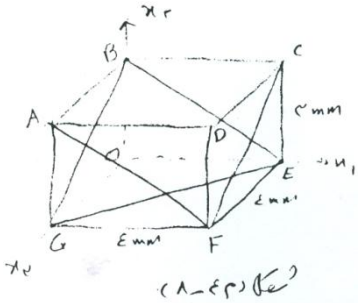
سری ۷:

مسئله ۸-۴ در نقطه O در یک جسم جامد، حالت تنش نسبت به دستگاه $Ox_1x_2x_3$ برابر است با:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} ۵۰۰ & ۲۰۰ & -۲۰۰ \\ ۲۰۰ & ۰ & ۴۰۰ \\ -۲۰۰ & ۴۰۰ & ۳۰۰ \end{bmatrix} \quad kg/cm^2$$

با استفاده از نمودار نشان داده شده در شکل (م ۸-۴)، تنش عمودی و برشی را در نقطهٔ O برای صفحات موازی با صفحات زیر محاسبه کنید.

(الف) BCGF ، (ب) ABEF ، (پ) BGE



شکل (م ۸-۴)

مسئله ۱۴-۴ نشان دهید که تنشهای اصلی در یک جسم دو بعدی با عبارات زیر داده می‌شود:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

و موقعیت صفحات اصلی توسط عبارت زیر تعیین می‌گردد:

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left[\frac{\sigma_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2}\right]$$

مسئله ۲۵-۴ میدان تنش در یک جسم جامد داده شده است:

$$\sigma_{11} = x_1x_2^2 + x_3^2 \qquad \sigma_{22} = \sin x_1 + 3x_2 \qquad \sigma_{33} = 10x_3$$

$$\sigma_{12} = 3x_1x_3 + 4x_2 \qquad \sigma_{23} = -3x_3^2/2 \qquad \sigma_{13} = -x_2(x_2^2 + 4)$$

آیا تعادل در جسم برقرار است؟ اگر نه، جسم چه حرکتی را خواهد داشت؟

جواب: نه، جسم در جهت x_2 شتاب می‌گیرد.

سری۸:

مسئله ۴-۳۰ (الف) دایرهٔ موهر را برای حالت تنش $\sigma_1 = 2a$، $\sigma_2 = a$ و $\sigma_3 = 0$ بکشید.

(ب) برای حالت تنش (الف)، با محورهای مختصات در جهات اصلی، کسینوسهای جهت یکه بردار عمود بر صفحه‌ای که روی آن $t_n = a$ و $\tau_n = (t_n)_s = \frac{3a}{4}$ است، محاسبه کنید.

(پ) معادلهٔ مکان هندسی تمام نقاط (t_n, τ_n) برای سطوحی که $n_1^2 = \frac{3}{8}$، پیدا کنید و مکان هندسی را رسم نمایید. حداکثر t_n روی آن را محاسبه کنید.

جواب: (ب) $n_x^2 = \frac{9}{32}$ ، $n_y^2 = \frac{14}{32}$ ، $n_z^2 = \frac{9}{32}$. (پ) $(t_n)_{max} = \frac{11a}{8}$

مسئله ۴-۲۹ نشان دهید که اگر مؤلفه‌های تنش را بر حسب توابع اسکالر $\phi_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ به صورت زیر نمایش دهیم، معادلات تعادل (۴-۲۶) در دستگاه مختصات دکارتی ارضا می‌شوند.

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \qquad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}\right) \qquad \sigma_{23} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{31} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}\right) \qquad (۴-۳۰)$$

مسئله ۴-۲۲ حالت تنش در نقطه‌ای از یک جسم جامد با عبارات زیر داده شده‌اند:

$$\sigma_{11} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad , \quad \sigma_{22} = a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_3^2 \quad , \quad \sigma_{33} = a_7 x_1^2 + a_8 x_2^2 + a_9 x_3^2$$

$$\sigma_{12} = a_{10} \quad , \quad \sigma_{23} = a_{11} x_2 + a_{12} x_3 \quad , \quad \sigma_{31} = a_{13} x_1^2 + a_{14} x_3^2$$

که a ها ثابتند. روابط نیروهای حجمی را برای ارضای تعادل به دست آورید.