# الاستیسیته

## فصل دوم:کرنش و تغییر مکان

## مسائل

### شماره ۱:

**مسئله ۳ـ۱** نشان دهید که معادلات $\varepsilon_{ij} = 0$ [روابط (۳ـ۸) ] مبین آنند که:

$$\mathbf{u} = (\Omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{b}$$

$\Omega$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی مستقل از $X_i$ بوده، اما احتمالاً وابسته به $t$ (زمان) ، می‌باشند. $\mathbf{r}$ و $\mathbf{u}$ به ترتیب بردارهای موقعیت و تغییر مکان هستند.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

**مسئله ۳ـ۸** حرکت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = -\frac{1}{X_1 + 1} \quad , \quad x_2 = X_2 \quad , \quad x_3 = X_3$$

(الف) ثابت کنید که تبدیل فوق یک به یک است.

(ب) نشان دهید که حرکت فوق تغییر شکل نیست.

**مسئله ۳ـ۱۵** میدان تغییر مکان زیر را در یک جسم الاستیک در نظر بگیرید:

$$u_i = A_i X_1^2 + B_i X_2^2 + C_i X_3^2 \qquad i = 1, 2, 3$$

(الف) مؤلفه‌های کرنش $\varepsilon_{ij}$ را بیابید، (ب) آیا این مؤلفه‌ها یک حالت سازگار کرنش را تشکیل می‌دهند.

جواب: (ب) بله.

شماره۲:

**مسئله ۳ـ۱۸** مؤلفه‌های کرنش برای انبساط حرارتی غیرمقید یک جسم جامد عبارت است از:

$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \alpha\Delta T \qquad \gamma_{xy}^{\cdot} = \gamma_{yz}^{\cdot} = \gamma_{xz}^{\cdot} = ۰$$

آیا این حالت کرنش، بدون توجه به اینکه $\Delta T$ بر حسب $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ چگونه تغییر می‌کند، منجر به میدان تغییر مکان پیوسته و منحصر به فرد می‌شود؟ چه قید یا قیدهایی باید روی $\Delta T$ به عنوان تابعی از $X_i$ اعمال نمود؟

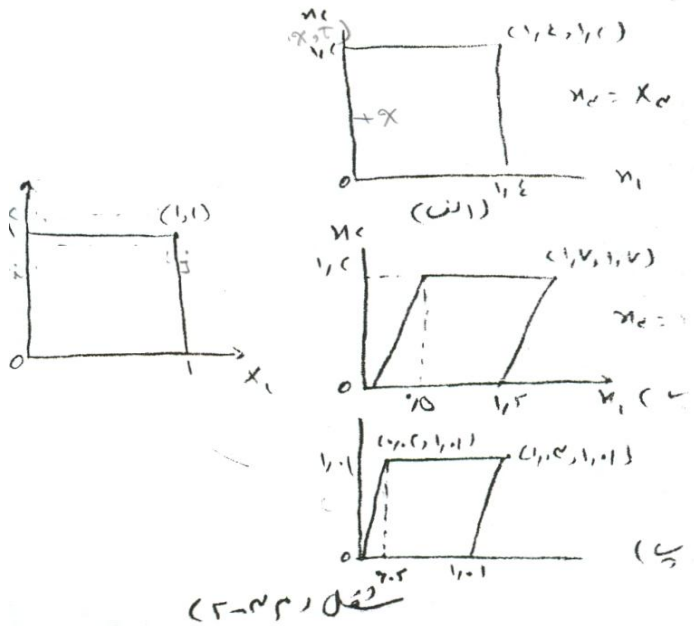
جواب: $\Delta T$ حداکثر می‌تواند یک تابع خطی از $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ باشد.

**مسئله ۳ـ۲** ورق مربع شکل نشان داده شده در شکل (م ۳ـ۲) تحت سه نوع میدان تغییر مکان به هیأتهای (الف)، (ب) و (پ) تغییر شکل می‌دهد. میدان تغییر مکان و مؤلفه‌های کرنش بینهایت کوچک و محدودِ لاگرانژی و اولری را برای هر سه حالت به دست آورید.

جواب: (الف) $x_۱ = ۱٫۴X_۱ \quad , \quad x_۲ = ۱٫۲X_۲ \quad , \quad x_۳ = X_۳$

(ب) $x_۱ = ۱٫۲X_۱ + ۰٫۵X_۲ \quad , \quad x_۲ = ۱٫۲X_۲ \quad , \quad x_۳ = X_۳$

(پ) $x_۱ = ۱٫۰۱X_۱ + ۰٫۰۲X_۲ \quad , \quad x_۲ = ۱٫۰۱X_۲ \quad , \quad x_۳ = X_۳$




شکل (م ۳ـ۲)

**مسئله ۳ـ۱۷** کرنش‌های زیر برای یک جسم الاستیک تغییر شکل یافته، اندازه‌گیری شده است:

$$\epsilon_x = A(X_۱^۲ + X_۲^۲) \quad , \quad \epsilon_y = ۰ \quad , \quad \epsilon_z = AX_۲^۲ \quad , \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = ۰ \quad , \quad \epsilon_{xz} = ۲AX_۱X_۲$$

مؤلفه‌های تغییر مکان مربوط را بیابید.

جواب: $u_۱ = A(X_۱^۲ / ۳ + X_۱X_۲^۲) - c_۱X_۲ + c_۲ \quad , \quad u_۲ = AX_۲^۳ / ۳ + c_۱X_۱ + c_۳$

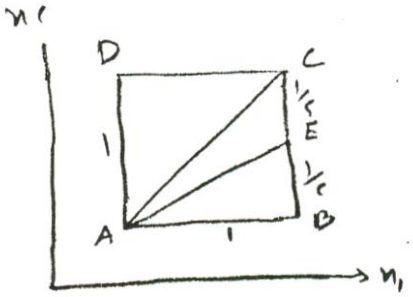
شماره ۳:

**مسئله ۳ـ۳** مربع واحد ABCD بخشی از یک جسم شکل‌پذیر است که در معرض میدان کرنش یکنواخت و کوچک زیر قرار گرفته است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \times ۱۰^{-۳}$$

تغییر طول خطوط AC و AE چقدر است (شکل م ۳ـ۳) ؟

جواب: تغییر طول AC برابر با ۰/۰۰۴۲۳ و تغییر طول AE برابر با ۰/۰۰۲۹ می‌باشد.




(۳ـ۴۳)

**مسئله ۳ـ۲۶** میدان تغییر مکان زیر داده شده است:

$$u = (X_۱X_۲X_۳e_۱ + ۳X_۱^۲X_۲X_۳e_۲ + ۴X_۲X_۳e_۳) \times ۱۰^{-۴}$$

المان خط بسیار کوچک $\delta s$ دارای کسینوسهای جهت زیر قبل از تغییر شکل است:

$$Q_{s۱} = ۰/۲ \quad , \quad Q_{s۲} = ۰/۸ \quad , \quad Q_{s۳} = ۰/۵۵۵$$

این المان خط از نقطهٔ (۳ ، ۱− ، ۲) صادر شده است. المان خط $\delta s'$ بعد از تغییر شکل چیست؟

**مسئله ۳ـ۱۶** آیا میدان کرنش زیر یک حالت ممکن (سازگار) کرنش را تشکیل می‌دهند؟

$$\varepsilon_x = AX_۲^۲ + BX_۱X_۲ \qquad \varepsilon_y = A(X_۱^۲ + X_۲^۲) + BX_۲ \qquad \gamma_{xy} = BX_۱X_۲ \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = ۰$$

جواب: بله، اگر $A = \frac{B}{۲}$

شماره۴:

**مسئله ۳ـ۵** نشان دهید که میدان تغییر مکان زیر متعلق به حالت کشش سادهٔ یک میلهٔ استوانه‌ای است.

$$u_1 = cX_1 \quad , \quad u_2 = -\nu cX_2 \quad , \quad u_3 = -\nu cX_3$$

c عدد ثابتی است.

---

**تمرین ۳ـ۲۲** آیا تغییر شکل در یک تیر تحت خمش خالص، متجانس است؟

**مسئله ۳ـ۷** به تغییر شکل زیر

$$x_1 = T_1(X_1 , X_2) \quad , \quad x_2 = T_2(X_1 , X_2) \quad , \quad x_3 = X_3$$

کرنش صفحه‌ای[1] گویند. کشیدگی در جهت $X_3$ چقدر است؟

شماره۵:

**مسئله ۳ـ۶** تغییر شکل همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2 \quad , \quad x_2 = X_2 \quad , \quad x_3 = X_3$$

نشان دهید که تبدیل فوق مبین حالت برش خالص است.

**تمرین ۳ـ۸** ماتریس تانسور گرادیان تغییر مکان را بنویسید.

**مسئله ۳ـ۹** تبدیلات خطی مختصات از $X_i$ به $x_i$ زیر را که هر دو نسبت به یک دستگاه مرجع دکارتی سنجیده می‌شوند، در نظر بگیرید:

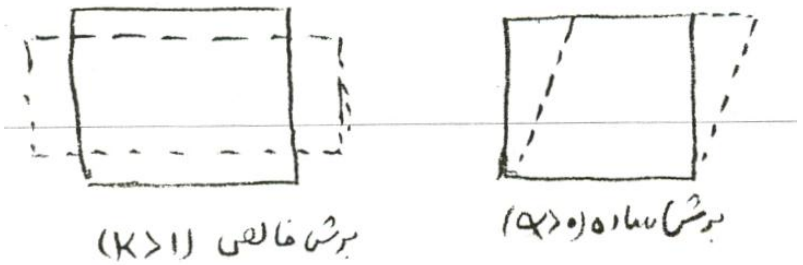
$$x_1 = \kappa X_1 \quad , \quad x_2 = \kappa^{-1} X_2 \quad , \quad x_3 = X_3$$

(الف) برش خالص

$$x_1 = X_1 + 2\alpha X_2 \quad ,$$

(ب) برش ساده

تغییر شکل یک مربع واحد که در معرض حرکتهای فوق قرار می‌گیرد، رسم کنید. $k$ و $\alpha$ ثابت‌اند. مشابهتها و تفاوتهای دو تغییر شکل را مشخص نمایید. (شکل م ۳ـ۹).



شماره۶:

**مسئله ۳-۱۰** معادلهٔ سطحی را بیابید که بعد از یک تغییر شکل متجانس به کرهٔ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ تبدیل می‌شود.
راهنمایی: از معادله‌ای به شکل $f(X_1, X_2, X_3) = 0$ استفاده کنید که $X_i$ را مختصات دکارتی هستند.

**مسئله ۳-۲۲** آیا میدانهای کرنش زیر مجاز هستند؟

(الف)
$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} cx_1^2 + x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} x_2(x_1^2 + x_2^2) & 2x_1x_2x_3 & x_3 \\ 2x_1x_2x_3 & x_2^2 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

جواب: (الف) بله؛ (ب) خیر

شماره۷:

**مسئله ۲۵-۳** نشان دهید که میدان کرنش زیر، یک حالت ممکن کرنش نیست:

$$\varepsilon_{11} = c_1(X_1^2 + X_2^2) \quad , \quad \varepsilon_{22} = c_1(X_2^2 + X_3^2) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = 0$$

$c_1$ و $c_2$ ثابت هستند.

**مسئله ۲۳-۳** حالت دو محوری کرنش در نقطه‌ای به صورت زیر داده شده است:

$$\varepsilon_{11} = 800 \times 10^{-6}\text{in/in} \quad , \quad \varepsilon_{22} = 200 \times 10^{-6}\text{in/in} \quad , \quad \varepsilon_{12} = 400 \times 10^{-6}\text{in/in}$$

کرنشهای اصلی و جهات متناظر را پیدا کنید.

جواب:

$$\varepsilon_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon_2 = 10^{-3}\text{in/in} \quad \text{و} \quad \theta_2 = -26/57^\circ$$

شماره۸:

**مسئله ۳ـ۲۴** میدان تغییر مکان زیر داده شده است:

$$\mathbf{u} = (X_1^2 X_2 + 5X_2^2)\,\mathbf{e}_1 + (X_1 X_2^2 X_3 + X_3^2)\,\mathbf{e}_2 + X_1^2 X_2^2 X_3^2\,\mathbf{e}_3$$

تانسور کرنش، تانسور چرخش و زاویهٔ چرخش را در نقطهٔ (۲، ۱-، ۲) بیابید.

**مسئله ۳ـ۲۰** کرنشهای عمودی و برشی را برای المان قطری شکل م ۳ـ۱۹ الف از مسئله ۳ـ۱۹ را پیدا کنید.

جواب: $\epsilon_x = \frac{e_0}{2b}$ ، $\epsilon_y = 0$ (برای a = b)

**مسئله ۳ـ۲۱** کرنش محوری را برای المان قطری شکل م ۳ـ۱۹ الف از مسئله ۳ـ۱۹ را به دست آورید: (الف) با استفاده از تعریف اولیه کرنش عمودی، و (ب) با استفاده از معادلات تبدیل مؤلفه‌های کرنش.