الاستیسیته

تمرینات فصل سوم

معادلات بنیادی و روابط بین تنش و کرنش

شماره ۱:

مسئله ۵ـ۱۲ عبارت انرژی کرنشی بر واحد حجم را برای یک جسم همسانگرد، متجانس و ترموالاستیک بر حسب (الف) تنش، کرنش، و دما؛ (ب) کرنش و دما؛ (پ) تنش؛ به دست آورید.

تمرین ۵ـ۱ معادلات (۵ـ۲) را به شکل بسط یافته در دستگاه مختصات دکارتی بنویسید. همچنین، روابط را به شکل ماتریسی بنویسید.

$$\sigma_{ij} = \lambda e\, \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad \text{(۵ـ۲ الف)}$$

یابالعکس

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \qquad \text{(۵ـ۲ ب)}$$

که $e = \varepsilon_{kk}$.

مسئله ۵ـ۱۳ انرژی کرنشی بر واحد حجم را در نقطه‌ای از یک جسم الاستیک خطی که حالت تنش در آن به صورت زیر است، به دست آورید.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1000 & -500 & 2000 \\ -500 & 2000 & -400 \\ 2000 & -400 & -1000 \end{bmatrix} \text{ psi}$$

داریم: $E = 30 \times 10^6$ psi و $G = 15 \times 10^6$ psi

شماره۲:

تمرین ۵ـ۲ نشان دهید که برای یک ماده الاستیک همسانگرد، فقط دو ثابت مستقل ماده وجود دارد.

مسئله ۵ـ۱۴ انرژی کرنشی بر واحد حجم را در نقطه‌ای از یک جسم الاستیک خطی به دست آورید که حالت کرنش در این نقطه عبارتست از:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۱ & -۰/۰۰۵ & ۰/۰۰۳ \\ -۰/۰۰۰۵ & ۰/۰۰۲ & -۰/۰۰۲ \\ ۰/۰۰۳ & -۰/۰۰۲ & -۰/۰۰۱ \end{bmatrix} \text{Psi}$$

داریم: $G = ۱ \times ۱۰^{۱۱}$ psi و $\nu = ۰/۳$

جواب: $u = ۳/۵۵ \times ۱۰^{۶}\ N/m^{۲}$

تمرین ۵ـ۳ معادلات (۵ـ۲) را در دستگاه مختصات قطبی (r,θ) بنویسید.

(۵ـ۲ الف) $\sigma_{ij} = \lambda e\, \delta_{ij} + ۲\mu\varepsilon_{ij}$

یابالعکس

(۵ـ۲ ب) $\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda\delta_{ij}}{۲\mu(۳\lambda + ۲\mu)}\sigma_{kk} + \frac{۱}{۲\mu}\sigma_{ij}$

که $e = \varepsilon_{kk}$.

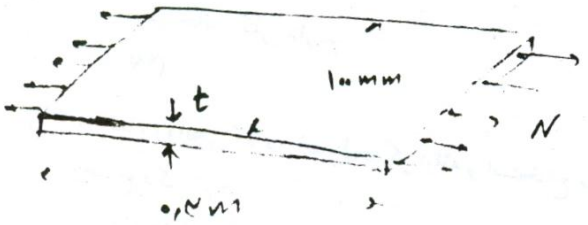
شماره۳:

مسئله ۵-۱۵ یک میلهٔ تخت تحت نیروی کشش تک محوره برابر با ۲۲۵۰N قرار گرفته است (شکل ۵۲-۱۵). رابطهٔ تنش - کرنش میله به صورت زیر است:

$$\sigma_{11} = c\,(\varepsilon_{11})^{3/2}$$

انرژی کرنشی میله را بر حسب ثابتهای c و l به دست آورید.

جواب: $U = \dfrac{2/15 \times 10^{5}}{(ct)^{3/2}}\ N \cdot m$



شکل (۵۲-۱۵)

تمرین ۵-۴ نشان دهید که در یک جسم الاستیک همگن و همسانگرد، جهات اصلی تانسور تنش بر محورهای اصلی تانسور کرنش لاگرانژی منطبق‌اند.

مسئله ۵-۲۵ یک میله استوانه‌ای با مقطع مستطیلی به طول l، عرض b و ارتفاع h تحت وزن خودش ایستاده است. توزیع تنش را در میله بدست آورید. نشان دهید که حل به دست آمده برای نواحی دورتر از تکیه‌گاه حقیقی و منحصر به فرد است.

شماره۴:

تمرین ۵ـ۷ معادلات (۳۵ـ۵) را در دستگاه مختصات Oxyz به صورت بسط یافته بنویسید. معادلات را برای حالت دویعدی Oxy بنویسید.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \qquad \text{یا} \qquad \mu \nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x_i} + \rho b_i = 0 \quad (۳۵-۸)$$

مسئله ۵ـ۱۶ (الف) مؤلفه‌های تنش را برای میدان تغییر مکان زیر به دست آورید (A و l ثابت هستند):

$$u_x = A\left[\frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{2}\nu\,(1 - z)\,(x^2 - y^2)\right]$$

$$u_y = A\nu(1 - z)xy$$

$$u_z = -A\left[x(lz - \frac{1}{2} z^2) + xy^2\right]$$

(ب) ثابت کنید که در غیبت نیروهای حجمی، معادلات تعادل ارضا می‌شوند.

تمرین ۵ـ۸ نشان دهید که معادلات (۳۵ـ۵) را می‌توان به شکل $v\epsilon_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + pb_i = 0$ نوشت. برای یک جسم تراکم‌ناپذیر ($\nu = \frac{1}{2}$)، معادلات ناویر را به دست آورید.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x_i} + \rho b_i = 0$$

شماره۵:

مسئله ۵ـ۱۷ روابط (۵ـ۳۴) را استخراج کنید.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \qquad (۵ـ۳۴)$$

تمرین ۵ـ۹ معادلات (۵ـ۴۱) را در دستگاه مختصات Oxyz به صورت بسط یافته بنویسید. معادلات را برای حالت دوبعدی Oxy نیز بنویسید.

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j}+b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\rho\delta_{ij}b_{k,k} = 0 \qquad (۵ـ۴۱)$$

روابط فوق، به عنوان معادلات سازگاری بلترامی[1] ـ میشل[2] مشهورند.

تمرین ۵ـ۱۲ میله‌ای را در نظر بگیرید که همزمان تحت نیروی کشش F، ممان خمشی M و گشتاور پیچشی T قرار گرفته است. آیا از اصل جمع آثار در این حالت می‌توان استفاده کرد؟ توضیح دهید. نحوهٔ حل مسئله را بیان کنید.

شماره۶:

مسئله ۵ـ۱۸ رابطهٔ (۵ـ۳۸) را اثبات کنید.

راهنمایی: با استفاده از (۵ـ۴۱) نشان دهید که $\nabla^2\sigma_{ii} = 0$، از آنجا می‌توان به $\nabla^2\varepsilon_{kk} = 0$ رسید.

$$(\lambda + \mu)\ \nabla\ (\nabla\ .\ \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{b} = \rho\ \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \qquad (۵ـ۳۸)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j}+b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\rho\delta_{ij}b_{k,k} = 0 \qquad (۵ـ۴۱)$$

تمرین ۵ـ۱۰ نحوهٔ استفاده از اصل سنت و نان را در کشش میله، خمش تیر و پیچش محور تشریح کنید.

مسئله ۵ـ۱۹ نشان دهید که اگر مسئله تنشِ الاستیسیته دارای حل $(u_i\ ,\ \varepsilon_{ij}\ ,\ \sigma_{ij})$ باشد، آنگاه $(u_i + d_i\ ,\ \varepsilon_{ij}\ ,\ \sigma_{ij})$ نیز حلی بر مسئله، برای تغییر مکانهای صلب بینهایت کوچک d_i، می‌باشد. آیا همین نتیجه را برای مسئله مختلط الاستیسیته می‌توان معتبر دانست.

شماره۷:

تمرین ۵ـ۱۱ اصل سنبت و نان را برای میلهٔ تحت کشش، در اثر نیروی متمرکز F، ثابت کنید.

مسئله ۵ـ۲۱ میله‌ای به سطح مقطع $(a \times b)$ و طول l از سقفی آویزان شده است (x_1 در امتداد محور میله و $x_1 = 0$ نقطهٔ اتصال به سقف است). (الف) میدان تنش و میدان تغییر مکان را در میله به دست آورید، (ب) تانسورهای تنش و کرنش را پیدا کنید، و (پ) آیا میدان تنش و تغییر مکان بند (الف)، شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند؟

تمرین ۵ـ۱۳ وجود حل برای مسائل الاستیسیته را اثبات کنید.

شماره۸:

مسئله ۵ـ۲۲ (الف) نشان دهید که هنگامی که ضریب پواسون $\nu = \frac{1}{2}$، قانون هوک به صورت $\sigma_{ij} = (2E/3)\,\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ نوشته می‌شود. اگر این رابطهٔ در معادلات تعادل قرار گیرد، سه معادله به دست می‌آید: $Eu_{j,ii} + 3\rho b_j + \sigma_{kk,j} = 0$ که همراه با معادلهٔ $u_{ii} = 0$ (که خود نتیجهٔ $\nu = 1/2$ است) مجموعه‌ای از چهار معادله برای سه مؤلفه تغییر مکان u_i و اولین پایای تنش σ_{kk} را، برای یک جسم الاستیک تراکم‌ناپذیر در حال تعادل، به دست می‌دهد.

(ب) اگر $\nu = \frac{1}{2}$ باشد، ثابت لامی λ و مدول حجمی k چه مقادیری خواهند داشت؟ رابطه μ و E چیست؟

(پ) مؤلفه‌های اثر $t_i = \sigma_{ij}n_j$ را بر حسب تغییر مکانها و σ_{kk} برای حالت $\nu = \frac{1}{2}$ بنویسید.

تمرین ۵ـ۱۴ در چه حالاتی از تقریب (۵-۴۷) نمی‌توان استفاده نمود؟ $\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \approx \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

مسئله ۵ـ۲۳ میدان تنش زیر داده شده است:

$$\sigma_{11} = c_1 X_1 X_2 + c_2 X_2 \quad , \quad \sigma_{12} = c_3 (h^2 - X_2^2) \quad , \quad \sigma_{ij} = 0 \ , \ b_i = 0$$

(الف) چه شرایطی باید بر c_1، c_2 و c_3 حاکم باشد تا میدان تنش در حال تعادل باشد.