الاستیسیته

تمرین های فصل دهم

روابط الاستیسیته در دستگاه مختصات قطبی

شماره ۱:

تمرین ۱۰ـ۱ با لحاظ المانی از جسم الاستیک، در دستگاه مختصات قطبی، معادلات تعادل (۱۰ـ۳) را استخراج کنید.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho b_r = 0$$ (تنش و کرنش صفحه‌ای) (۱۰ـ۳ الف)

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + \rho b_\theta = 0$$ (تنش و کرنش صفحه‌ای) (۱۰ـ۳ ب)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$ (فقط کرنش صفحه‌ای) (۱۰ـ۳ پ)

تمرین ۱۰ـ۶ روابط (۱۰ـ۲۰) را استخراج کنید.

$$u_r = \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)c_2}{r} + 2c_3(1-\nu-2\nu^2)r - c_4(1+\nu)r + 2c_4(1-\nu-2\nu^2)r\,\mathrm{Ln}\,r\right] + C\sin\theta + B\cos\theta$$ (۱۰ـ۲۰ الف)

$$u_\theta = \frac{4c_4 r\theta}{E}(1-\nu^2) + C\cos\theta - B\sin\theta + Ar$$ (۱۰ـ۲۰ ب)

شماره ۲:

تمرین ۱۰-۲ روابط (۱۰-۴) را اثبات کنید.

(۱۰-۴ الف) (تنش و کرنش صفحه‌ای) $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$

(۱۰-۴ ب) (تنش و کرنش صفحه‌ای) $\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$

(۱۰-۴ پ) (تنش و کرنش صفحه‌ای) $\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}$

(۱۰-۴ ت) (فقط تنش صفحه‌ای) $\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$

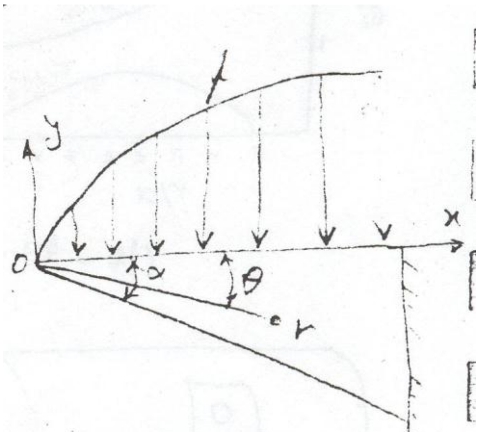
مسئله ۵-۵ یک گوه دو بعدی با مادهٔ کاملاً الاستیک را در نظر بگیرید [شکل (م ۵-۵)]. اگر یک طرف گوه ($\theta = 0$) با توزیع فشار عمودی $q(r) = Qr^m$ بارگذاری شده باشد، که Q و m ثابت هستند، و طرف دیگر ($\theta = \alpha$) بدون تنش باشد، نشان دهید که مسئله را می‌توان با یک تابع تنش آیری به شکل زیر حل نمود. اگر $m \neq 0$ (m می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از صفر باشد):

$$\phi(r, \theta) = r^{m+2}[\, a\cos(m+2)\theta + b\sin(m+2)\theta + c\cos m\theta + d\sin m\theta \,] \qquad (1)$$

اگر $m = 0$ ،

$$\phi(r, \theta) = kr^2[\, -\mathrm{tg}\alpha \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \alpha - \theta \,] \qquad (2)$$

ثابتهای a ، b ، c ، d و k را به دست آورید. پیرامون محدود بودن مؤلفه‌های تنش، σ_r و σ_θ و $\sigma_{r\theta}$ ، شیب، $\partial v/\partial r$ ، و مشتق دوم، $\partial^2 v/\partial r^2$ ، در مجاورت نوک گوه، $r \to 0$ ، بحث کنید. نماد v نمایشگر مؤلفه تغییر مکان در جهت افزایش θ است.



(٤-١٠٣)

شماره۳:

تمرین ۱۰-۳ روابط (۱۰-۷) را استخراج نمایید.

معادلات تعادل بر حسب تغییر مکان عبارتند از:

$$\nabla^{2}u_r + \left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u_r}{r^{2}} - \frac{2}{r^{2}}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho b_r}{G} = 0$$

(۱۰-۷ الف)

$$\nabla^{2}u_\theta + \left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\frac{\partial e}{r\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^{2}} + \frac{2}{r^{2}}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\rho b_\theta}{G} = 0$$

(۱۰-۷ ب)

مسئله ۱۰-۴ پیرامون عبارت $\phi = \cos^{2}\theta/r$ به عنوان یک تابع تنش احتمالی بررسی و کنکاش کنید.

شماره۴:

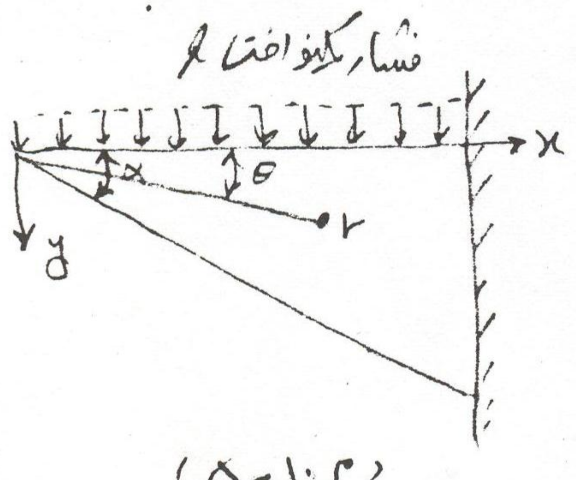
تمرین ۱۰-۴ رابطهٔ(۸۱۰) را اثبات کنید.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

مسئله ۱۰-۵ تابع تنش زیر باید شرایط روی لبه‌های بالا و پایین ورق نشان داده شده در شکل م ۱۰-۵ را ارضا کند:

$$\phi(r, \theta) = c\,[\, r^2(\alpha - \theta) + r\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\theta\ \mathrm{tg}\alpha \,]$$

ثابت c و مؤلفه‌های تغییر مکان را برای نقاط واقع در لبهٔ بالایی محاسبه کنید.



(۵-۱۰م)

شماره۵:

مسئله ۱۰-۱ توابع تنش زیر همراه با شرایط مرزی تنش داده شده‌اند. آیا این توابع تنش مجازند؟ نوع بارگذاری را در مرزهای مشخص شده، برای هر حالت محاسبه کنید. c ثابت است.

(الف) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\qquad \phi(r, \theta) = cr\sin\theta$

(ب) مرز جسم مدور است: $x^2 + y^2 = r^2$ $\qquad \phi(r, \theta) = cr^2\sin 2\theta$

تمرین ۱۰-۶ روابط (۱۰-۲۰) را استخراج کنید.

$$u_r = \frac{1}{E}\left[-\frac{(1+\nu)c_2}{r} + 2c_3(1-\nu-2\nu^2)r - c_4(1+\nu)r + 2c_4(1-\nu-2\nu^2)r\operatorname{Ln}r\right] + C\sin\theta + B\cos\theta \qquad \text{(۱۰-۲۰ الف)}$$

$$u_\theta = \frac{4c_4 r\theta}{E}(1-\nu^2) + C\cos\theta - B\sin\theta + Ar \qquad \text{(۱۰-۲۰ ب)}$$

شماره۶:

مسئله ۱۰-۲ نشان دهید که برای مسائل ترموالاستیک با تقارن محوری و نیروی حجمی صفر، معادلهٔ سازگاری در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) + E\alpha T = 0$$

تمرین ۱۰-۲ روابط (۱۰-۴) را اثبات کنید.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \text{(تنش و کرنش صفحه‌ای)} \qquad \text{(۱۰-۴ الف)}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \qquad \text{(تنش و کرنش صفحه‌ای)} \qquad \text{(۱۰-۴ ب)}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \qquad \text{(تنش و کرنش صفحه‌ای)} \qquad \text{(۱۰-۴ پ)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \text{(فقط تنش صفحه‌ای)} \qquad \text{(۱۰-۴ ت)}$$

شماره۷:

تمرین ۱۰ـ۵ با استفاده از معادلات تبدیلِ مؤلفه‌های تنش، روابط (۳) را اثبات کنید.

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_0 (1 + \cos 2\theta)$$ (۳الف)

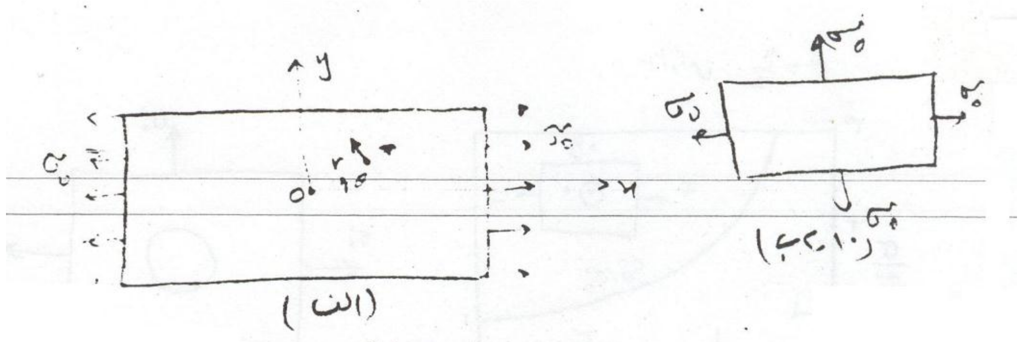
$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_0 (1 - \cos 2\theta)$$ (۳ب)

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta$$ (۳پ)

مسئله ۱۰ـ۴ پیرامون عبارت $\phi = \cos^2\theta/r$ به عنوان یک تابع تنش احتمالی بررسی و کنکاش کنید.

شماره۸:

مسئله ۱۰ـ۳ یک ورق نازک در معرض تنش دو محوری، مطابق با شکل ۱۰ـ۲ ب قرار گرفته است. میدان تنش را در دستگاه مختصات دکارتی و قطبی بنویسید.



(۲-۱۰)

مسئله ۱۰ـ۲ نشان دهید که برای مسائل ترموالاستیک با تقارن محوری و نیروی حجمی صفر، معادلهٔ سازگاری در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) + E\alpha T = 0$$