

6-1 مقدمه:

در این بخش تنش و تغییر شکل میله‌های منشوری تحت کوپل پیچش بررسی می‌شود. در تئوری مقدماتی پیچش، روابط تنش و زاویه پیچش میله‌های استوار بصورت زیر بیان می‌شوند؛

$$\frac{M_t r}{J} \quad (a)$$

$$\int_L \frac{M_t dz}{GJ} \quad (b)$$

در این روابط؛ τ تنش برشی، M_t کوپل پیچشی، r شعاع لایه‌ای که تنش آن مورد بررسی می‌شود، G مدول برشی، θ زاویه پیچش واحد طول، L طول، و z محور مختص امتداد محور میله می‌باشند. ممان اینرسی قطبی J ، $\int_A r^2 dA$ ، است و برای دایره‌ای توپر بشعاع a برابر $\frac{\pi a^4}{2}$ می‌باشد.

برای بدست آوردن روابط (a) و (b) فرضهای پایه زیر ضروری است؛

۱- جسم همگن بوده و از قانون هوک پیروی می‌کند،

۲- همه سطح مقطع‌های عمود بر میله، پس از پیچش روی آن سطح باقی می‌مانند.

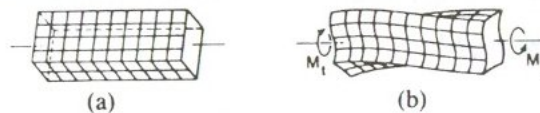
۳- کرنش زاویه‌ای هر نقطه از سطح مقطع تابع خطی از فاصله آن نقطه تا محور

است،

۴- زاویه پیچش واحد طول ثابت می‌باشد.

معمولاً محورهای تحت پیچش استوانه‌ای توپر یا توخالی هستند، ولی در موارد میله‌های با مقاطع غیردایره‌ای نیز تحت پیچش قرار می‌گیرند، شکل (6-1) بخش میله‌های با سطح مقطع ثابت، یا میله‌های منشوری تحلیل و بررسی می‌شود.

همانطور که در شکل (6-1) دیده می شود، وقتی این نوع میله ها تحت پیچش قرار می گیرند، هر مقطع تغییر شکل محوری هم دارد. در نتیجه فرضهای (2) و (3) در این مورد معتبر نیستند، و تحلیل این میله ها به کمک تئوری الاستیسیته امکان پذیر است.



شکل (6-1)

6-2 حل کلی مسأله پیچش؛

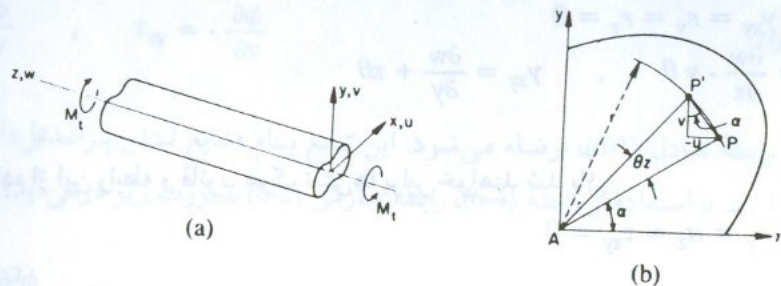
میله ای منشوری با سطح مقطع دلخواه و ثابت تحت دو کوپل پیچش در دو انتها، شکل (6-2) در نظر گرفته می شود. مبدأ مختصات x, y, z در مرکز پیچش، یعنی جائیکه مقطع در اثر پیچش حول آن می چرخد، انتخاب می شود. در این نقطه تغییر مکانهای u و v در جهت های x و y صفر می باشند.

محل مرکز پیچش بستگی به شکل مقطع دارد. باید توجه داشت که هر چند برای بدست آوردن روابط پایه از مرکز پیچش استفاده می شود، قرار دادن مبدأ مختصات در هر نقطه دیگر مقطع اثری در حل نهائی مسأله پیچش ندارد (رجوع شود به مسأله 6-4). محور z از مرکز پیچش همه مقاطع می گذرد.

همانطور که در مقدمه گفته شد، در حالت کلی، مقطع میله تغییر شکل محوری خواهد داشت. در این قسمت تحلیل میله تحت پیچش با تغییر شکل محوری آزاد و با استفاده از روش نیمه معکوس سنت و نانت⁽¹⁾ انجام می گیرد. در این روش از سه فرض

1- St. Venant Semi- inverse method

پایه ای زیر استفاده می شود؛



شکل (6-2)

1- تغییر شکل محوری مقطع بستگی به z نداشته و عبارت دیگر برای همه مقاطع یکسان می باشد. در نتیجه؛

$$w = f(x, y) \tag{a}$$

2- تصویر مقطع تغییر شکل یافته روی صفحه xy چرخش صلب دارد،

3- زاویه پیچش واحد طول ثابت است.

در شکل (6-2b) تصویر قسمتی از مقطع روی صفحه xy نشان داده شده است. با توجه به فرضهای بالا، این تصویر برای همه مقاطع یکسان می باشد. در اثر پیچش، نقطه $P(x, y)$ که در فاصله r از مرکز پیچش A قرار دارد، به نقطه $P'(x-u, y+v)$ تغییر مکان می دهد. با فرض اینکه در $z=0$ چرخشی رخ نمی دهد و θ کوچک می باشد، تغییر مکانهای نقطه P در جهت های x و y برابر خواهند شد با؛

$$u = - (r\theta z) \sin \alpha = - y \theta z \tag{b}$$

$$v = (r\theta z) \cos \alpha = x \theta z$$

که در آن تغییر مکان زاویه ای AP در فاصله z از انتهای سمت راست برابر θz ، زاویه بین

AP و محور x برابر α ، و مختصات نقطه P، x و y و z می باشند. رابطه (b) نشاندهنده چرخش صلب هر مقطع باندازه زاویه کوچک θz است. با قراردادن روابط (a) و (b) در رابطه (2-3)، مؤلفه های کرنش برابر می شوند؛

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \gamma_{xy} = \epsilon_y = \epsilon_z = 0 \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - y\theta, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + x\theta \end{aligned} \quad (c)$$

با استفاده از این رابطه و قانون هوک تنش ها برابر خواهند شد؛

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta \right) \quad (d)$$

$$\tau_{zy} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta \right) \quad (e)$$

با قراردادن روابط (d) و (e) در روابط تعادل (1-5)، و با صرف نظر کردن از نیروهای

حجمی، نتیجه می شود؛

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (6-1)$$

اگر از رابطه اول (e) نسبت به y و از رابطه دوم نسبت به x مشتق گرفته، و از هم کم شوند، رابطه سازش بصورت زیر درمی آید؛

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = H \quad (6-2)$$

که در آن H برابر است با؛

$$H = -2G\theta \quad (6-3)$$

با حل روابط (6-1) و (6-2) و استفاده از شرایط مرزی، تنش در هر نقطه از مقطع

بدست خواهد آمد.

تابع تنش؛

حل مسأله پیچش مثل آنچه که در قسمت خمش دیده شد، معمولاً بکمک یک تابع انجام می شود. اگر تابع $\phi(x, y)$ طوری فرض شود که روابط زیر برقرار باشد؛

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6-4)$$

رابطه تعادل (6-1)، ارضاء می شود. این تابع بنام «تابع تنش پراندتل»⁽¹⁾ نامیده می شود. با استفاده از رابطه (6-4)، رابطه سازش (6-2) بصورت زیر درمی آید؛

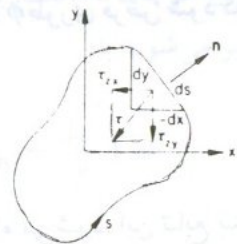
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = H \quad (6-5)$$

در نتیجه برای اینکه رابطه سازش ارضاء شود، تابع باید طوری انتخاب گردد که این رابطه برقرار باشد.

شرایط مرزی

ابتدا سطح جانبی میله که بدون بار است بررسی می شود. با مراجعه به قسمت 1-3، تنش τ_{xz} موازی محور z است و در صفحه ای عمل می کند که نرمال آن موازی محور x می باشد. عبارت دیگر این تنش روی صفحه yz دارد می آید. بطریق مشابه τ_{zx} روی صفحه xy عمل می کند و موازی محور x می باشد. باتوجه به تقارن تانسور تنش $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ و $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ است. در نتیجه تنش های داده شده طبق رابطه (e) روی صفحه xy نزدیک مرز مطابق شکل (6-3) خواهند بود. المان مرزی در این شکل بصورت قوس ds نشان داده شده است. باید توجه داشت که ds در خلاف عقربه های ساعت ازدیاد می یابد، و وقتی ds صفر است، المان بصورت نقطه مرزی درمی آید. با استفاده از رابطه بین نیروهای سطحی و تنش های داخلی، رابطه (1-31)، و باتوجه به اینکه کسینوس زاویه نرمال یکه \vec{n} و محور z صفر می باشد [Cos (n,z) = 0]، نتیجه می شود؛

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m = 0$$



شکل (6-3)

رابطه (f) نشان می‌دهد که تنش برشی منتجه، τ ، مماس بر مرز میله می‌باشد، شکل (6-3) از طرفی از شکل دیده می‌شود که؛

$$l = \cos(n,x) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(n,y) = -\frac{dx}{ds} \quad (g)$$

باید توجه داشت که وقتی s زیاد می‌شود، x کم شده و y نیز زیاد می‌گردد. این امر علامت جلوی dx و dy را توجیه می‌نماید. با قراردادن روابط (6-4) و (g) در رابطه (f) نتیجه خواهد شد؛

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (\text{روی مرز}) \quad (6-6)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق تابع تنش در امتداد منحنی مرزی صفر است. در نتیجه تابع $\phi(x,y)$ باید روی سطح جانبی میله منشوری مقدار ثابتی باشد. از طرفی رابطه (6-4) نشان می‌دهد که اگر به تابع تنش مقدار ثابتی اضافه یا کم شود، تأثیری در تنش‌ها نخواهد داشت. عبارت دیگر با جایگزین کردن (مقدار ثابت) ϕ بجای ϕ تنش‌های حاصل از رابطه (6-4) بدون تغییر خواهند بود. این توضیح نشان می‌دهد که در روی مرز (برای میله‌های منشوری توپر) تابع تنش می‌تواند صفر فرض شود. در قسمت (6-5)

نشان داده می‌شود که در مورد مقاطع توخالی و چندخانه روی مرزها مقادیر ثابتی برای ϕ باید در نظر گرفت.

حال پس از بررسی شرایط مرزی روی سطح جانبی، وضع دو سطح انتهایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نرمال این سطوح موازی محور z می‌باشد، و کسینوسهای هادی این سطوح برابر خواهند شد با؛

$$\cos(n,z) = \pm 1, \quad l = m = 0$$

در اینصورت برای $T_z=0$ ، از رابطه (1-31) نتیجه می‌شود؛

$$T_x = \pm \tau_{zx}, \quad T_y = \pm \tau_{zy} \quad (h)$$

که در آن علائم جبری مربوط به زاویه نرمال سطح و جهت مثبت z می‌باشد. با مراجعه بشکل (6-2a)، برای سطح سمت راست باید علامت منفی منظور نمود.

شرایط تعادل

روی دو سطح انتهایی باید جمع نیروهای حاصل از مؤلفه‌های تنش صفر باشد. جمع نیروهای حاصل از تنش τ_{zx} برابر است با؛

$$\int \int T_x dx dy = \int \int \tau_{zx} dx dy$$

با قراردادن مقدار τ_{zx} از رابطه (6-4)، و بسط آن نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \int \int T_x dx dy &= \int \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \\ &= \int dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \int \phi \Big|_{y_1}^{y_2} dx = \int (\phi_2 - \phi_1) dx = 0 \end{aligned}$$

در این عبارت y مؤلفه نقاط روی مرز است. از آنجا که ϕ روی مرز میله باید مقدار ثابتی باشد، مقادیر ϕ بازاء y_1 و y_2 مقدار ثابتی خواهد بود. عبارت دیگر $\phi_1 = \phi_2 = \text{Const}$

می‌باشد. بطریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$\int \int \tau_{zy} dx dy = 0$$

در حالیکه جمع نیروهای حاصل از تنش‌ها در سطوح انتهایی صفر است، ممان حاصل از

آنها حول محور z باید با Mt در حالت تعادل باشد. در نتیجه؛

$$M_t = \iint (x\tau_{xy} - y\tau_{zx}) dx dy = - \iint x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy - \iint y \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy$$

$$= - \int dy \int x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \int dx \int y \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

با انتگرال گرفتن جزء به جزء نتیجه خواهد شد؛

$$M_t = - \int x \phi I_{x_1} dx + \iint \phi dx dy - \int y \phi I_{y_1} dy + \iint \phi dx dy$$

چون ϕ روی مرز مقدار ثابتی است و x_1, x_2, y_1, y_2 مؤلفه‌های نقاط روی مرز می‌باشند دو ترم از این عبارت صفر شده، و نتیجه می‌شود

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \tag{6-7}$$

طرف دوم این عبارت دو برابر حجم زیر سطح ϕ می‌باشد.

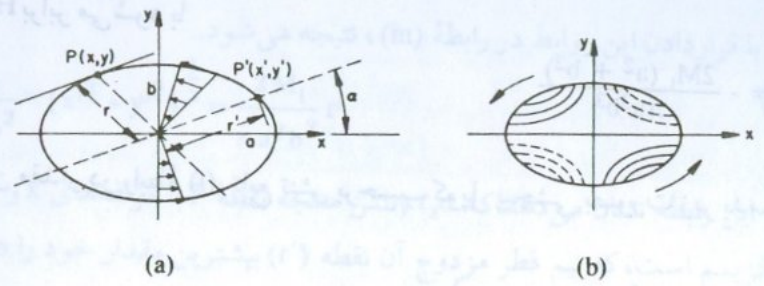
در بحث فوق همه مسائل مربوط به پیچش میله منشوری بررسی شد. روابط تعادل با روابط (6-4)، سازش با روابط (6-5) و شرایط مرزی با روابط (6-6) بیان گردید. روابط کوپل پیچش و تابع تنش نیز بصورت رابطه (6-7) بدست آمد.

- در نتیجه برای تحلیل یک میله منشوری تحت پیچش بترتیب ذیل باید عمل کرد.
- 1- تابع تنش ϕ طوری انتخاب می‌شود که روابط (6-5) و (6-6) را ارضاء نماید،
 - 2- رابطه بین تابع تنش و کوپل پیچش با استفاده از رابطه (6-7) بدست می‌آید،
 - 3- با استفاده از روابط (6-4) و (6-3) توزیع تنش و زاویه پیچش واحد طول محاسبه می‌گردد. کاربرد این روش در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال 6-1

یک میله منشوری با مقطع بیضی شکل تحت کوپل پیچش قرار دارد، شکل (6-4a). تنش برشی ماگزیمم واویه پیچش واحد طول میله را بدست آورید. در ضمن تغییر مکان محوری، $w(x,y)$ را محاسبه نمایید.

فرض کنید $G=80 \text{ GPa}$ و $b=0.025 \text{ m}$ ، $a = 0.05 \text{ m}$ ، $M_t = 1200\pi \text{ N.m}$ باشد.



شکل (6-4)

حل - روابط (6-5) و (6-6) با انتخاب تابع تنش بصورت زیر ارضاء می‌شوند.

$$\phi = k \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

در این رابطه k مقدار ثابتی است و باید محاسبه شود. با قراردادن این تابع تنش در رابطه (6-5)، k برابر می‌شود با؛

$$k = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} H$$

$$\phi = \frac{a^2 b^2 H}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

در نتیجه

(i)

با قراردادن تابع تنش در رابطه (6-7) نتیجه خواهد شد.

$$M_t = \frac{a^2 b^2 H}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right)$$

$$M_t = \frac{a^2 b^2 H}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} I_y + \frac{1}{b^2} I_x - A \right)$$

که در آن A مساحت بیضی است. با قراردادن مقادیر A و ممان اینرسی‌های I_x و I_y

جدول C.1 نتیجه می‌شود؛

آنها حول محور z باید با Mt در حالت تعادل باشد. در نتیجه؛

$$M_t = \iint (x \tau_{xy} - y \tau_{zx}) dx dy = - \iint x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \iint y \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy$$

$$= - \int dy \int x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \int dx \int y \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

با انتگرال گرفتن جزء به جزء نتیجه خواهد شد؛

$$M_t = - \int x \phi I_{x_1} dx + \int y \phi I_{y_1} dy - \iint \phi dx dy$$

چون ϕ روی مرز مقدار ثابتی است و x_1, x_2, y_1, y_2 مؤلفه‌های نقاط روی مرز می‌باشند دو ترم از این عبارت صفر شده، و نتیجه می‌شود

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \tag{6-7}$$

طرف دوم این عبارت دو برابر حجم زیر سطح ϕ می‌باشد.

در بحث فوق همه مسائل مربوط به پیچش میله منشوری بررسی شد. روابط تعادل با روابط (6-4)، سازش با روابط (6-5) و شرایط مرزی با روابط (6-6) بیان گردید. روابط کوپل پیچش و تابع تنش نیز بصورت رابطه (6-7) بدست آمد.

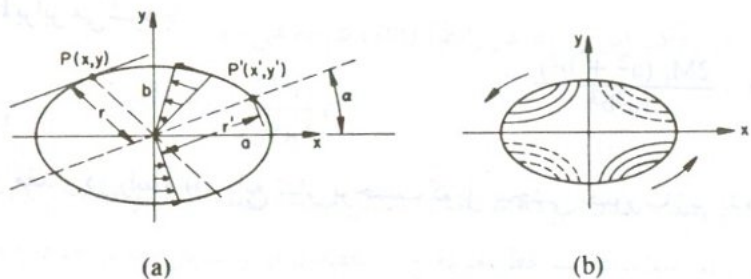
در نتیجه برای تحلیل یک میله منشوری تحت پیچش بترتیب ذیل باید عمل کرد.

- 1- تابع تنش ϕ طوری انتخاب می‌شود که روابط (6-5) و (6-6) را ارضاء نماید،
- 2- رابطه بین تابع تنش و کوپل پیچش با استفاده از رابطه (6-7) بدست می‌آید،
- 3- با استفاده از روابط (6-4) و (6-3) توزیع تنش و زاویه پیچش واحد طول محاسبه می‌گردد. کاربرد این روش در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال 6-1

یک میله منشوری با مقطع بیضی شکل تحت کوپل پیچش قرار دارد، شکل (6-4a). تنش برشی ماگزیمم واویه پیچش واحد طول میله را بدست آورید. در ضمن تغییر مکان محوری، $w(x,y)$ را محاسبه نمائید.

فرض کنید $G=80 \text{ GPa}$ ، $b=0.025 \text{ m}$ ، $a = 0.05 \text{ m}$ ، $M_t = 1200\pi \text{ N.m}$ باشد.



شکل (6-4)

حل - روابط (6-5) و (6-6) با انتخاب تابع تنش بصورت زیر ارضاء می‌شوند.

$$\phi = k \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

در این رابطه k مقدار ثابتی است و باید محاسبه شود. با قراردادن این تابع تنش در رابطه (6-5)، k برابر می‌شود با؛

$$k = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} H$$

در نتیجه

$$\phi = \frac{a^2 b^2 H}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

(i)

با قراردادن تابع تنش در رابطه (6-7) نتیجه خواهد شد.

$$M_t = \frac{a^2 b^2 H}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right)$$

$$M_t = \frac{a^2 b^2 H}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} I_y + \frac{1}{b^2} I_x - A \right)$$

که در آن A مساحت بیضی است. با قراردادن مقادیر A و ممان اینرسی‌های I_x و I_y (جدول C.1) نتیجه می‌شود؛

مختصات نقاط P و P' با روابط زیر بهم وابسته اند.

$$x = \frac{a}{b} y' \quad , \quad y = \frac{b}{a} x'$$

با قراردادن این روابط در رابطه (m)، نتیجه می شود.

$$\tau_{z\alpha} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b^2} (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b^2} r' \quad (n)$$

این رابطه نشان می دهد که $\tau_{z\alpha}$ (تنش متوجه نقطه P با مؤلفه های x و y) در نقطه ای ماگزیمم است، که نیم قطر مزدوج آن نقطه (r') بیشترین مقدار خود را دارا باشد. این حالت وقتی اتفاق می افتد که؛

$$r' = a, r = b$$

است. بعبارت دیگر در نقاط $x = 0, y = \pm b$ تنش متوجه ماگزیمم بوده و برابر خواهد شد با؛

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2} = \frac{2(1200\pi)}{\pi(0.05)(0.025)^2} = 76.8 \text{ MPa}$$

زاویه پیچش واحد طول با قراردادن رابطه (k) در رابطه (6.3) برابر می شود با

$$\theta = \frac{(a^2 + b^2) M_t}{\pi a^3 b^3 G} = \frac{(0.05^2 + 0.025^2)(1200\pi)}{\pi(0.05)^3(0.025)^3(80 \times 10^9)} = 0.024 \text{ rad/m} \quad (o)$$

سفتی پیچشی، $C^{(1)}$ ، در یک تیر عبارت از نسبت ممان پیچش به زاویه پیچش واحد طول است. بعبارت دیگر

$$C = \frac{M_t}{\theta} \quad (6-8)$$

باتوجه به رابطه (o)، سفتی پیچشی میله ای با مقطع بیضی شکل برابر می شود با

$$C = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G$$

مؤلفه های تغییر مکان u و v از رابطه (b) بدست می آیند. برای بدست آوردن تغییر

$$M_t = \frac{a^2 b^2 H}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\pi b a^3}{4} + \frac{1}{b^2} \frac{\pi a b^3}{4} - \pi a b \right) = \frac{-\pi a^3 b^3 H}{2(a^2 + b^2)}$$

از این رابطه H برابر می شود با

$$H = -\frac{2M_t (a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (k)$$

با قراردادن این مقدار در رابطه (i)، تابع تنش برحسب کوپل پیچشی بصورت زیر بدست می آید؛

$$\phi = -\frac{M_t}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

مؤلفه های تنش برشی با استفاده از رابطه (6-4) برابر می شوند با؛

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3} = -\frac{M_t y}{2I_x}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b} = \frac{M_t x}{2I_y} \quad (l)$$

نسبت مؤلفه های تنش متناسب با y/x بوده، و این نسبت در امتداد هر شعاع بیضی مقدار ثابتی می باشد:

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = -\frac{y}{x} \frac{a^2}{b^2} = -\frac{y}{x} \frac{I_y}{I_x}$$

تنش متوجه برابر می شود با؛

$$\tau_{z\alpha} = (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2M_t}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (m)$$

این تنش در هر نقطه مماس بر محیط بیضی است که از آن نقطه می گذرد. در ضمن α نشاندهنده یک زاویه دلخواه، شکل (6-4a)، می باشد. رابطه (l) نشان می دهد که تنش برشی ماگزیمم در نقطه ای روی مرز اتفاق می افتد. برای پیدا کردن تنش برش ماگزیمم، ابتدا نقطه $P'(x', y')$ روی قطر مزدوج قطری که P روی آن واقع است انتخاب می گردد. در اینصورت Op' موازی خط مماس در نقطه P است.

مکان محوری، $w(x,y)$ ، ابتدا مقادیر τ_{zy} ، τ_{zx} و θ در رابطه (e) جایگزین می شوند:

$$\tau_{zx} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3} = G \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{y (a^2 + b^2) M_t}{\pi a^3 b^3 G} \right]$$

$$\tau_{zy} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b} = G \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{x (a^2 + b^2) M_t}{\pi a^3 b^3 G} \right]$$

از ترم اول این عبارت w برابر می شود با

$$w(x,y) = \frac{M_t}{G} \frac{(b^2 - a^2) xy}{\pi a^3 b^3} + f(y)$$

و از ترم دوم برابر خواهد شد با

$$w(x,y) = \frac{M_t}{G} \frac{(b^2 - a^2) xy}{\pi a^3 b^3} + f(x)$$

چون بازاء تمام تصاویر x و y باید w حاصل از این دو عبارت یکسان باشد، $f(x)=f(y)=0$ بوده، و در نتیجه

$$w(x,y) = \frac{M_t}{G} \frac{(b^2 - a^2) xy}{\pi a^3 b^3} \quad (p)$$

محل نقاط با تغییر مکان محوری ثابت، $w=cte$ ، هذلولیهای مطابق شکل (6-46) خواهد بود. باتوجه به جهت کوپل پیچش نشان داده شده در شکل، خطوط پر نشان دهنده قسمت کاو مقطع و خطوط خط چین نشان دهنده قسمت کوژ مقطع می باشد.

تمام نتایج بدست آمده در این مثال با قراردادن $b=a$ مربوط به پیچش مقطع دایره ای شکل خواهد شد. در اینصورت با استفاده از روابط (m) و (o) تنش منتهجه و زاویه پیچش واحد طول برابر خواهند شد؛

$$\tau = \frac{M_t r}{J}$$

و

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

که همان نتایج ثوری مقدماتی پیچش می باشد. در ضمن با قراردادن $b=a$ در رابطه (p)، $w=0$ خواهد شد. این نتیجه نشان می دهد که حرکت محوری در میله با مقطع

دایره ای شکل صفر بوده و سطح مقطع مستوی باقی می ماند.

6-3 تشابه غشائی پراندتل (1)

در این قسمت نشان داده می شود که معادله دیفرانسیل تابع تنش، رابطه (5-6)، مشابه رابطه خیز غشاء یا فیلم صابون تحت فشار جانبی است. در نتیجه تشابهی بین مسأله پیچش و غشاء وجود دارد. بدین منظور سوراخی شبیه مقطع میله تحت پیچش روی صفحه ای صلب ایجاد می شود. اندازه سوراخ الزاماً نباید با اندازه مقطع یکی باشد. غشاء نازکی روی سوراخ گسترده شده و از اطراف با نیروی S بر واحد طول کشیده می شود. اگر غشاء از یک طرف تحت فشار یکنواخت عرضی P قرار گیرد، خیز z در آن ایجاد می شود، شکل (6.5a) با استفاده از تعادل المان کوچک $abcd$ از غشاء می توان رابطه خیز z را بدست آورد. این المان از همه طرف با نیروی یکنواخت S بر واحد طول کشیده می شود. با فرض کوچک بودن z شیب نیروی S در لبه ab برابر $\frac{\partial z}{\partial x} \approx \beta$ می باشد. چون z از نقطه ای به نقطه دیگر متغیر است، شیب نیروی S در لبه dc برابر می شود با

$$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \approx \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$$

بطریق مشابه شیب نیروی کششی در لبه های ad و bc برتیب برابر خواهند بود با

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

با فرض ثابت بودن نیروی کششی S و صرف نظر کردن از وزن غشاء، اگر فشار بر واحد

سطح P باشد رابطه تعادل در جهت قائم بصورت زیر خواهد بود.

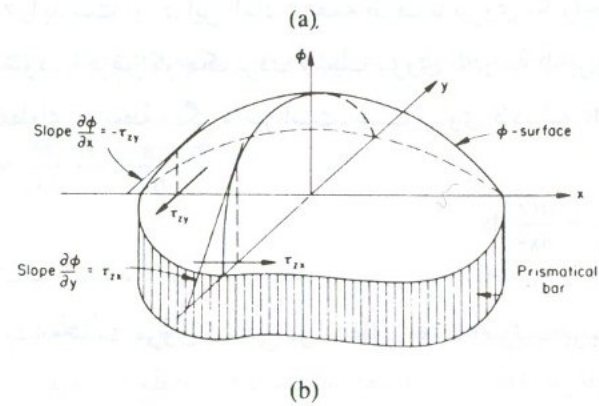
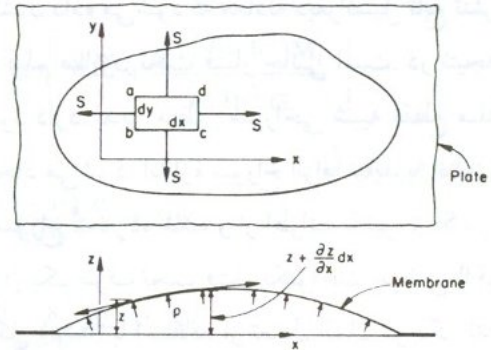
$$- (Sdy) \frac{\partial z}{\partial x} + (Sdy) \left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right] - (Sdx) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ (Sdx) \left[\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right] + p dx dy = 0$$

در نتیجه

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{P}{S} \quad (6-9)$$

که یک رابطه پواسیون می باشد.



شکل (6-5)

با مقایسه رابطه (6-9) و روابط (6-5) و (6-4) دیده می شود که مقادیر زیر با هم مشابه هستند:

در نتیجه غشاء با توجه به شرایط ذکر شده، سطح ϕ را نشان می دهد، شکل (6-5b). باید همواره بخاطر داشت که شیب غشاء باید کوچک باشد.

با روش تجربی زیر می توان برخی مقاطع نامشخص را به روش غشائی تحلیل نمود. در دو ورق نازک و سفت که بهم پیچ شده اند، دو سوراخ در مجاورت هم ایجاد می شود.

Membrane problem	Torsion problem
z	ϕ
$\frac{1}{S}$	G
p	2θ
$-\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$	τ_{xy}, τ_{yx}
$2 \cdot (\text{volume beneath membrane})$	M_t

یکی از سوراخها دایره ای شکل و دیگری بشکل دلخواه می باشد. ورقها از هم جدا شده و روی هرکدام صفحه لاستیکی نازکی (با کشش تقریباً یکنواخت و مساوی) گسترده می شود. سپس این دو ورق مجدداً بهم پیچ می شوند. حال اگر این مجموعه از یک طرف تحت فشار یکنواخت P قرار گیرد، غشاء روی سوراخها تغییر شکلهای متفاوتی خواهند داشت. در این آزمایش از مقطع دایره ای شکل بمنظور کالیبره کردن استفاده می شود. چون حل دقیق مقطع دایره ای شکل تحت پیچش در دسترس می باشد، نسبت تناسب بین فشار و زاویه پیچش، شیب و تنش، و حجم و کوپل پیچش بدست می آید. باتوجه به اینکه این نسبت برای هر دو مقطع یکی است، با اندازه گیری شیب مقطع دوم، τ و با اندازه گیری حجم آن M_t محاسبه می گردد.

کاربرد تشابه غشائی فقط در روش تجربی نیست. در قسمت بعدی نشان داده می شود که از این تشابه می توان برای حل تحلیلی میله های با مقطع نازک استفاده کرد.

در جدول (6-1) تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول چند نوع مقطع آورده شده است.

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{P}{S}$$

با دومرتبه انتگرال گرفتن از این رابطه، نتیجه خواهد شد.

$$z = \frac{1}{2} \frac{P}{S} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - x^2 \right] \quad (a)$$

برای رسیدن به رابطه (a) از شرایط مرزی

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad x = t/2 \\ \frac{dz}{dx} = 0 & \quad , \quad z = 0 \end{aligned}$$

استفاده شده است. حجم سهموی محصور بین غشاء و صفحه xy برابر می‌شود با

$$V = \frac{Pbt^3}{12S}$$

با استفاده از تشابه، بجای P، 2θ و بجای $1/S$ ، G قرار داده می‌شود. در نتیجه کوپل پیچشی برابر خواهد شد با

$$M_t = 2V = \frac{1}{3} bt^3 G\theta$$

سفتی پیچشی مقطع چهارگوش نازک برابر می‌شود با

$$C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{1}{3} bt^3 G = JG$$

در این رابطه J ممان اینرسی قطبی مقطع می‌باشد. در ضمن از تشابه، مؤلفه تنش برشی برابر خواهد شد با

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial z}{\partial x} = 2G\theta x \quad (b)$$

و زاویه پیچش واحد طول از رابطه کوپل پیچشی برابر می‌شود با

$$\theta = \frac{3M_t}{bt^3G} \quad (6-10)$$

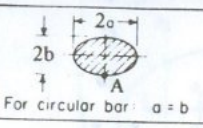
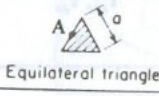
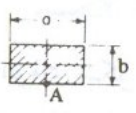
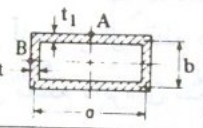
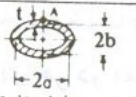
تنش برشی ماکزیمم در $t/2 \pm$ اتفاق می‌افتد. در نتیجه

$$\tau_{\max} = G\theta t = \frac{2M_t}{bt^2} \quad (6-11)$$

یا

$$M_t = \frac{1}{3} bt^2 \tau_{\max} \quad (6-12)$$

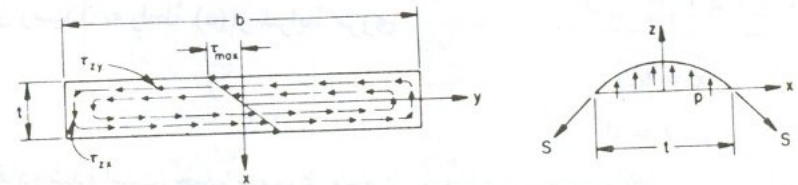
طبق رابطه (b)، تنش برشی تابع خطی از x است، شکل (6-6). کوپل پیچشی حاصل از این مؤلفه تنش برابر خواهد شد با

Cross section	Shear stress (τ)	Angle of twist per unit length (θ)																													
 For circular bar: $a = b$	$\tau_A = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$	$\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{M_t}{G}$																													
 Equilateral triangle	$\tau_A = \frac{20M_t}{a^3}$	$\frac{46.2}{a^4} \cdot \frac{M_t}{G}$																													
	$\tau_A = \frac{M_t}{aob^2}$	$\frac{1}{\beta ab^3} \cdot \frac{M_t}{G}$																													
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/b</th> <th>β</th> <th>a</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.0</td><td>0.141</td><td>0.208</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>0.196</td><td>0.231</td></tr> <tr><td>2.0</td><td>0.229</td><td>0.246</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.249</td><td>0.256</td></tr> <tr><td>3.0</td><td>0.263</td><td>0.267</td></tr> <tr><td>4.0</td><td>0.281</td><td>0.282</td></tr> <tr><td>5.0</td><td>0.291</td><td>0.292</td></tr> <tr><td>10.0</td><td>0.312</td><td>0.312</td></tr> <tr><td>∞</td><td>0.333</td><td>0.333</td></tr> </tbody> </table>	a/b	β	a	1.0	0.141	0.208	1.5	0.196	0.231	2.0	0.229	0.246	2.5	0.249	0.256	3.0	0.263	0.267	4.0	0.281	0.282	5.0	0.291	0.292	10.0	0.312	0.312	∞	0.333	0.333
a/b	β	a																													
1.0	0.141	0.208																													
1.5	0.196	0.231																													
2.0	0.229	0.246																													
2.5	0.249	0.256																													
3.0	0.263	0.267																													
4.0	0.281	0.282																													
5.0	0.291	0.292																													
10.0	0.312	0.312																													
∞	0.333	0.333																													
	$\tau_A = \frac{M_t}{2obt_1}$ $\tau_B = \frac{M_t}{2obt}$	$\theta = \frac{at + bt_1}{2t_1 a^2 b^2} \cdot \frac{M_t}{G}$																													
 For circular tube: $a = b$	$\tau_A = \frac{M_t}{2\pi abt}$	$\theta = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{4\pi a^2 b^2 t} \cdot \frac{M_t}{G}$																													

جدول (6-1)

6-4 پیچش مقاطع جدار نازک باز

میله‌ای منشوری با مقطع مستطیلی، تحت پیچش در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود $b \gg t$ می‌باشد، شکل (6-6). در اینصورت می‌توان شکل غشاء را در همه مقطع یکنواخت و منشوری فرض نمود، بطوریکه $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ است. در نتیجه رابطه (6-9) بصورت ساده زیر درمی‌آید.



شکل (6-6)

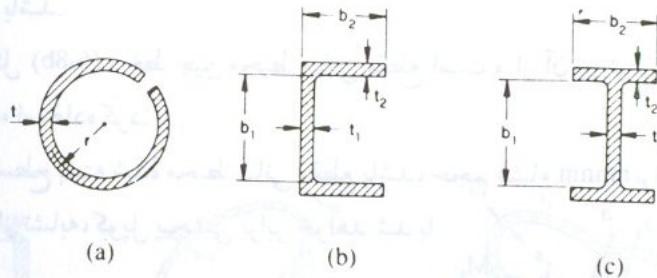
$$M_t = 2 \left(\frac{1}{2} \tau_{\max} \frac{t}{2} \right) \left(\frac{t}{3} \right) (b) = \frac{1}{6} b t^2 \tau_{\max}$$

دیده می شود که این کوپل نصف کوپل بدست آمده از رابطه (6-12) می باشد. واضح است که نیمه دیگر کوپل مربوط به مؤلفه τ_{zx} است که در تحلیل فوق صرف نظر شده است. شیب غشاء در $y = \pm b/2$ کمتر از $x = \pm t/2$ بوده و در نتیجه $(\tau_{zx})_{\max} < (\tau_{zy})_{\max}$ می باشد. در نتیجه عبارت (6-11) بدون توجه به تقریب بکار رفته، بیشترین تنش مقطع را نشان می دهد. علت اینکه مؤلفه تنش τ_{zx} با وجود کوچک بودن نسبت به τ_{zy} ، کوپل تعادلی معادل آن دارد این است که نزدیک $y = \pm b/2$ بازوی ممان بزرگتر ($b \gg t$) می باشد. روابط (6-10) و (6-11) برای سایر مقاطع جدار نازک، شکل (6-7)، نیز قابل استفاده است. باتوجه به اینکه در تحلیل فوق تمرکز تنش در نظر گرفته نشده است، محلتهائی که با روش فوق محاسبه می شود باید به اندازه کافی از گوشه های تیز دور باشد، شکل های (6-6b,c). درجه صحت راه حل فوق برای هر مقطع بستگی به تشابه غشاء آن با غشاء شکل (6-6) دارد. برای نشان دادن کاربرد روابط (6-10) و (6-11) در این مقاطع، شکل (6-7c) در نظر گرفته می شود. با جمع سفتی پیچشی سه قسمت این مقطع زاویه پیچش واحد طول و تنش برشی ماکزیمم برابر می شوند با

$$\theta = \frac{M_t}{G \left(\frac{1}{3} b_1 t_1^3 + \frac{2}{3} b_2 t_2^3 \right)} = \frac{3M_t}{G} \frac{1}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3} \quad (6-13)$$

$$\tau_{\max} = G\theta t_i = \frac{3M_t t_i}{b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3} \quad (6-14)$$

که در آن مقدار بزرگتر t_1 و t_2 می باشد. اثر تمرکز تنش در گوشه ها در قسمت (6-6) بررسی خواهد شد.



شکل (6-7)

6-5 پیچش مقاطع جدار نازک بسته

با کمی دقت، تشابه غشایی می تواند برای تحلیل میله های لوله ای جدار نازک بکار رود. فرض می شود شکل غشاء برای یک مقطع لوله ای دلخواه مطابق شکل (6-8a) باشد. واضح است که باتوجه به اینکه مقطع توخالی است، و در قسمت توخالی تنش صفر می باشد، قوس ab غشاء بی مفهوم خواهد بود. با جایگزین کردن این قوس با سطح ϕ ثابت، شرط صفر بودن تنش در این قسمت ارضاء خواهد شد. حال اگر مقطع توخالی چندخانه باشد، مقدار ثابت در خانه های مختلف متفاوت می باشد. چون قدر مطلق ϕ بدون مفهوم است، در این حالت می توان مقدار ثابت ϕ را برای یک خانه صفر در نظر گرفته و بقیه را نسبت به آن تنظیم نمود.

باتوجه به بحث فوق کاربرد تشابه غشائی برای یک مقطع لوله ای جدار نازک، شکل (6-8b)، بررسی می شود. در این حالت صفحه ثابت که لبه غشاء به آن متصل است شکل

لبه خارجی لوله را دارد، و در ضمن غشاء به صفحه بی وزن nn که شکل لبه داخلی لوله را دارا می باشد در تماس است. صفحه بی وزن nn طوری قرار داده می شود که افقی باقی مانده و اثری روی شکل غشاء در لبه ها نداشته باشد. با فرض اینکه لوله جدار نازک است، از انحنا غشاء می توان صرف نظر کرده و شیب nm را در ضخامت t ثابت فرض کرد.

در نتیجه تنش برشی نیز در امتداد ضخامت t ثابت بوده و برابر خواهد شد با

$$\tau = \frac{h}{t} \quad \text{یا} \quad h = \tau t \quad (a)$$

که در آن h ارتفاع غشاء و t ضخامت لوله است. ضخامت t ممکن است در امتداد محیط میله متغیر باشد.

در شکل (6-8b)، خط چین محیط میانی مقطع است و از آن می توان برای محاسبه حجم غشاء استفاده کرد.

اگر A سطح بسته شده محیط میانی مقطع باشد، حجم غشاء mnm برابر Ah بوده، و با استفاده از تشابه، کوپل پیچشی برابر خواهد شد با

$$M_t = 2Ah \quad \text{یا} \quad h = \frac{M_t}{2A} \quad (b)$$

با ترکیب روابط (a) و (b) نتیجه می شود؛

$$\tau = \frac{M_t}{2At} \quad (6-15)$$

در کاربرد این رابطه باید توجه داشت که مقطع جدار نازک است، و ضمن اینکه ضخامت مقطع می تواند متغیر باشد، تغییر ضخامت ناگهانی وجود ندارد.

برای بدست آوردن زاویه پیچش واحد طول مجدداً شکل (6-8b) در نظر گرفته می شود. با فرض $h \ll t$ نتیجه می شود $\tau = \frac{h}{t} \approx \left(\frac{h}{t}\right) \cdot t$. بنابراین از شرط تعادل در جهت قائم نتیجه خواهد شد.

$$PA = \int \left(\frac{h}{t} s\right) ds = \int \tau s ds$$

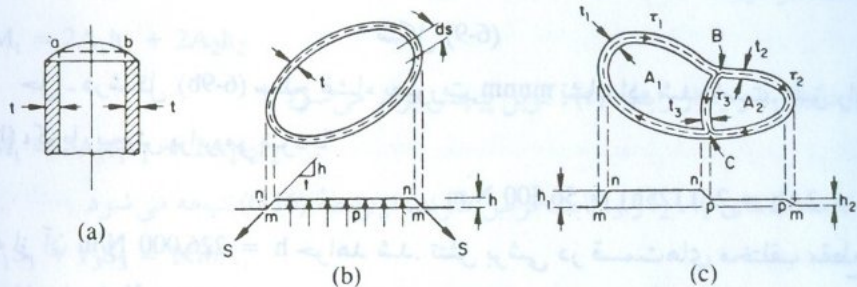
که در آن s طول محیط میانی لوله می باشد. چون کشش در غشاء ثابت است، h مستقل از s خواهد بود. در نتیجه رابطه فوق را می توان بصورت زیر نوشت

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{A} \int \tau ds = \frac{h}{A} \int \frac{ds}{t} = 2G\theta$$

که در آن ترم آخر با توجه به تشابه نوشته شده است. از این رابطه، زاویه پیچش واحد طول برابر خواهد شد با

$$\theta = \frac{h}{2GA} \int \frac{ds}{t} = \frac{1}{2GA} \int \tau ds \quad (6-16)$$

روابط (6-15) و (6-16)، مقدار h واحد نیرو بر واحد طول را دارا می باشد. بدین علت h جریان برش نیز نامیده می شود.



شکل (6-8)

مثال 6-2

یک میله آلومینیومی با مقطع چهارگوش توخالی، شکل (6-9a)، تحت کوپل پیچش 56.5 kN.m حول محور طولی خود قرار دارد. تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول را محاسبه کنید. ابعاد داده شده در شکل بر حسب متر است، و $G = 28 \text{ GPa}$ می باشد.

در مقاطع چندخانه مثل مقطع نشان داده شده در شکل (6.8c) روش تحلیل فوق قابل استفاده است. مثل حالت قبل فرض می شود ضخامت کم است و در نتیجه خطوط mn ، np و pm تقریباً مستقیم هستند. تابع تنش در این حالت باغشاء $mnpPm$ نشان داده شده است. خطوط nn و pp در این غشاء مستقیم بوده و توسط صفحات بدون وزن (بشکل خانه های توخالی) ایجاد شده اند. با توجه به شکل (6-8) تنش در قسمت های مختلف این مقطع برابر خواهند بود

$$\tau_1 = \frac{h_1}{t_1}, \tau_2 = \frac{h_2}{t_2} \quad (c)$$

$$\tau_3 = \frac{h_1 - h_2}{t_3} = \frac{t_1 \tau_1 - t_2 \tau_2}{t_3} \quad (d)$$

این تنش ها در اثر کوپل پیچش ایجاد شده اند و اندازه این کوپل دو برابر حجم غشاء می باشد. در نتیجه

$$M_t = 2A_1 h_1 + 2A_2 h_2 \quad (e)$$

با قراردادن h_1 و h_2 از رابطه (c)، کوپل پیچش برابر می شود با

$$M_t = 2A_1 t_1 \tau_1 + 2A_2 t_2 \tau_2 \quad (f)$$

اگر ضخامت های t_1 ، t_2 و t_3 ثابت فرض شوند، از رابطه (6-16) نتیجه می شود

$$\tau_1 S_1 + \tau_3 S_3 = 2G\theta A_1 \quad (j)$$

$$\tau_2 S_2 - \tau_3 S_3 = 2G\theta A_2 \quad (h)$$

که در آن S_1 ، S_2 و S_3 مسیر انتگرال گیری است و در شکل با خط چین نشان داده شده اند.

توجه داشته باشید که علائم این رابطه مربوط به جهت تنش برشی و جهت انتگرال گیری

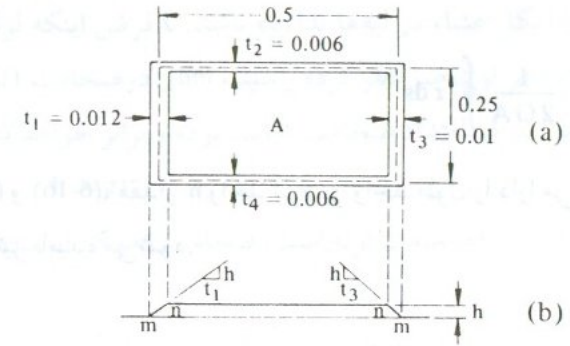
می باشد. بدین ترتیب از چهار رابطه [(d)، (f)، (g)، (h)] می توان چهار مجهول τ_1 ، τ_2 ، τ_3 و θ را بدست آورد. رابطه (d) را می توان بصورت زیر نوشت

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 + \tau_3 t_3 \quad (i)$$

این رابطه نشان می دهد که جریان برش $h = \tau_1$ مقدار ثابتی است و توزیع آن در

قسمت های مختلف مقطع مشابه توزیع جریان مایع در کانال می باشد. از این تشابه می توان

برای بدست آوردن جریان برش در مقاطع پیچیده استفاده کرد.



شکل (6-9)

حل - در شکل (6-9b) سطح غشاء بصورت mnm نشان داده شده است. طبق رابطه

(b)، کوپل پیچش برابر می شود با

$$M_t = 2Ah = 2(0.125h) = 56,500 \text{ N.m}$$

که از آن $h = 226,000 \text{ N/m}$ خواهد شد. تنش برشی در قسمت های مختلف مقطع با

استفاده از رابطه (a) برابر می شوند با؛

$$\tau_1 = \frac{h}{t_1} = \frac{226000}{0.012} = 18.83 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{h}{t_2} = \frac{226000}{0.006} = 37.67 \text{ MPa}$$

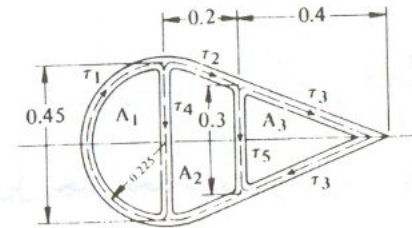
$$\tau_3 = \frac{h}{t_3} = \frac{226000}{0.01} = 22.6 \text{ MPa}$$

زاویه پیچش واحد طول از رابطه (6-16) برابر خواهد شد با

$$\theta = \frac{h}{2GA} \oint \frac{ds}{t} = \frac{226000}{2 \times 28 \times 10^9 \times 0.125} \left(\frac{0.25}{0.012} + 2 \frac{0.5}{0.006} + \frac{0.25}{0.01} \right)$$

$$= 0.00686 \text{ rad / m}$$

یک میله فولادی با مقطع چند خانه‌ای مطابق شکل (6-10)، کوپل پیچشی 12.KN.m را تحمل می‌کند. ضخامت قسمت‌های مختلف مقطع $t_4=t_5=3\text{mm}$ و $t_1=t_2=t_3=6\text{mm}$ می‌باشد. تنش برشی ماگزیمم و زاویه پیچش واحد طول را حساب کنید. همه ابعاد داده شده در شکل برحسب متر بوده و $G = 80\text{ GPa}$ می‌باشد.



شکل (6-10)

حل - جریان تنش برشی در قسمت‌های مختلف مقطع مطابق شکل فرض می‌شود. در اینصورت رابطه جریان برش بصورت زیر درمی‌آید

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 + \tau_4 t_4$$

$$\tau_2 t_2 = \tau_5 t_5 + \tau_3 t_3 \quad (j)$$

کوپل پیچشی رابطه‌ای مشابه رابطه (f) بصورت زیر دارد.

$$M_t = 2A_1 t_1 \tau_1 + 2A_2 t_2 \tau_2 + 2A_3 t_3 \tau_3 = 12,000\text{ N.m} \quad (k)$$

روابط مورد نیاز دیگر با استفاده از رابطه (6-16) روی سطوح A_1 ، A_2 و A_3 بدست می‌آیند. این روابط بصورت زیر خواهند بود.

$$\tau_1 t_1 + \tau_4 t_4 = 2G\theta A_1$$

$$-\tau_4 t_4 + 2\tau_2 S_2 + \tau_5 S_5 = 2G\theta A_2$$

$$-\tau_5 t_5 + 2\tau_3 t_3 = 2G\theta A_3$$

باتوجه به شکل مقادیر S و A برابر می‌شوند با

$$S_1 = 0.7069\text{m} , S_2 = 0.2136\text{m} , S_3 = 0.4272\text{m} , S_4 = 0.45\text{m}$$

$$S_1 = 0.7069\text{m} , S_2 = 0.2136\text{m} , S_3 = 0.4272\text{m} , S_4 = 0.45\text{m}$$

$$S_5 = 0.3\text{m} , A_1 = 0.079522\text{m}^2 , A_2 = 0.075\text{m}^2 , A_3 = 0.06\text{m}^2$$

با حل شش رابطه (j)، (l) نتایج زیر بدست می‌آید

$$\tau_1 = 4.902\text{ MPa} , \tau_2 = 5.088\text{ MPa} , \tau_3 = 3.809\text{ MPa}$$

$$\tau_4 = -0.373\text{ MPa} , \tau_5 = 2.558\text{ MPa} , \theta = 0.0002591\text{ rad/m}$$

علامت مثبت تنش‌های τ_1 ، τ_2 ، τ_3 و τ_5 نشان می‌دهد که جهت این تنش‌ها همان جهت‌های انتخاب شده در شکل (6-10) می‌باشد. علامت منفی تنش τ_4 نشان می‌دهد که جهت انتخاب شده در شکل صحیح نیست و این تنش بسمت بالا خواهد بود.

6-6 تشابه جریان مایع⁽¹⁾ و تمرکز تنش

بررسی رابطه (6-4) نشان می‌دهد که بین تابع تنش ϕ و تابع جریان ψ در مکانیک سیالات تشابهی بصورت زیر برقرار است.

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} , \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6-17)$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} , v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

در این رابطه v_x و v_y مؤلفه‌های سرعت مایع (\vec{V}) در جهت‌های x و y می‌باشند. رابطه پیوستگی در مایعات تراکم‌ناپذیر بصورت زیر است

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

بافرض $\psi(x,y)$ طبق رابطه (6-17)، این رابطه برقرار خواهد بود.

چرخش ($\vec{\omega} = \vec{\bar{v}} + \vec{\bar{v}}$) در جریان دوماحوری بصورت زیر است

$$\omega = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

که در آن $\vec{\omega} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{j}$ می‌باشد. باتوجه به تابع جریان، نتیجه خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2\omega \quad (6-18)$$

دیده می شود که این رابطه نیز مشابه رابطه (6-5) می باشد، و در آن 2θ جایگزین $2G\theta$ شده است. با نشان دادن اینکه ψ در امتداد مسیر جریان (و در نتیجه روی مرز) مثل ϕ روی مرکز، ثابت است، تشابه کامل خواهد شد. چون رابطه جریان در حالت دو محوری بصورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{یا} \quad v_x dy - v_y dx = 0$$

اگر بجای v_x و v_y بر حسب تابع تنش قرار داده شود نتیجه خواهد شد

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0 \quad (6-19)$$

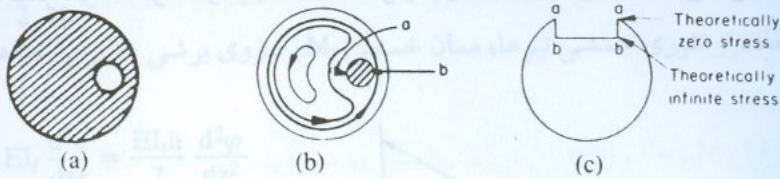
این رابطه نشان می دهد که ψ در امتداد جریان مقدار ثابتی می باشد.

بر مبنای بحث فوق، آزمایشهای مفیدی با استفاده از تشابه جریان مایع ایده آل با چرخش ثابت و پیچش میله انجام شده است. در این آزمایشها مقطعی که مایع در داخل آن جریان دارد و مقطع میله تحت پیچش باید یکسان باشند. در اینصورت الگوهای توزیع تنش قابل رؤیت و تحلیل خواهند بود.

تشابه جریان مایع بخصوص برای بررسی «تمرکز تنش برشی» نتایج مفیدی بدست می دهد. بدین منظور فرض می شود میله استوانه ای تحت پیچش سوراخی دایره ای مطابق شکل (6-11a) دارد. در آزمایش تشابه جریان مایع، لوله ای انتخاب شده و میله ای توپیر بجای سوراخ محور تحت پیچش در داخل آن در نظر گرفته می شود. جریان مایع در داخل این لوله مطابق شکل (6-11b) خواهد بود. تئوری مکانیک سیالات نشان می دهد که سرعت مایع در نقاط a و b دو برابر سرعت مایع در حالت بدون مانع در همان شعاعها می باشد. در نتیجه ضریب تمرکز تنش حول سوراخ محور تحت پیچش حداکثر 2 خواهد بود.

مورد استفاده دیگری از تشابه مایع، بررسی تمرکز تنش حول جاخار در محور تحت پیچش است، شکل (6-11c). جریان مایع نشان می دهد که سرعت مایع در نقاط a صفر بوده و در نتیجه تنش نیز در این نقاط صفر خواهد بود. از طرف دیگر با توجه به اینکه سرعت مایع در گوشه های تیز b تقریباً بی نهایت است، تنش نیز در این نقاط بی نهایت خواهد شد. این نتیجه علت شکست میله های تحت خستگی پیچشی در نقاط تیز را

توجیه می نماید. برای کم کردن تمرکز تنش باید این نقاط گرد شود.



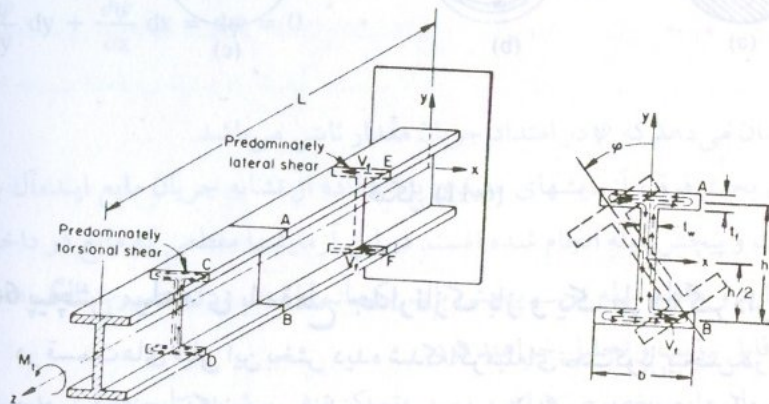
شکل (6-11)

6-7 پیچش میله های با مقطع جدار نازک باز و یک طرف گیردار

در قسمت های قبلی این بخش دیده شد که اگر میله ای تحت کوپل پیچش در دو انتها قرار گیرد، در میله تغییر مکان محوری ایجاد می شود. حال اگر دو انتهای میله آزاد باشد، همه مقاطع میله (من جمله دو مقطع انتهائی) تحت تنش برشی خالص قرار می گیرند. در اینصورت توزیع تنش از رابطه (6-5) بدست آمده و شرایط مرزی [رابطه (6-6)] ارضاء خواهد شد. اگر یکی از مقاطع میله ثابت نگهداشته شود (مثل یک طرف گیردار)، واضح است که نرخ تغییر زاویه پیچش و در نتیجه تغییر مکان محوری متفاوت شده، و لایه های طولی میله تحت تنش کششی یا فشاری قرار خواهند گرفت. در اینصورت روابط (6-5) و (6-6) برای مقاطعی که به اندازه کافی از مقطع ثابت دور هستند قابل استفاده می باشند.

در میله با مقطع دایره ای چون تغییر مکان محوری صفر است گیردار کردن یک انتها و یا ثابت نگهداشتن هر یک از مقاطع تأثیری در تحلیل پیچشی میله نخواهد داشت. این اثر در مقاطع توپیر نظیر بیضی یا چهارگوش نیز کم است، ولی در مقاطع جدار نازک باز مثل ناودانی و یا مقطع I قابل توجه است. برای مثال، یک تیر با مقطع I و یک سرگیردار، شکل (6-12)، تحت کوپل پیچش در نظر گرفته می شود.

در مقطعی نزدیک انتهای گیردار، قسمت عمدهٔ باریجشی توسط نیروی برشی عرضی V_f در هر فلانچ منتقل می‌شود. این نیروی برشی، خمش عرضی در فلانچ ایجاد می‌کند. طبق تئوری خمشی، تنش نرمال خطی بین هر فلانچ و دیواره (تکیه‌گاه) تولید می‌شود. باتوجه به اینکه مقطع هر فلانچ چهارگوش است، تنش ایجاد شده در محل اتصال فلانچ و ساقه صفر خواهد بود. در نتیجه ساقه همواره درحالت پیچش ساده باقی می‌ماند.



شکل (6-12)

با مراجعه به شکل (6-12)، کوپل خارجی M_t با اثر تنش برشی پیچشی و مقاومت خمشی فلانچ‌ها درحال تعادل خواهد بود. بعبارت دیگر در هر مقطع دلخواه مثل AB، M_t با دو ممان M_{t1} و M_{t2} در حالت تعادل است. M_{t1} مربوط به تنش‌های برشی خالص پیچشی (درحالتی که تغییر مکان محوری آزاد است) می‌باشد، و برای مقطع دلخواه AB بصورت زیر با زاویه پیچشی وابسته است

$$M_{t1} = C \frac{d\varphi}{dz} \quad (a)$$

در این رابطه، C سفتی پیچشی تیر می‌باشد. برای علایم کوپل پیچشی و زاویه پیچش از قانون دست راست استفاده می‌شود.

در اثر خمش فلانچها، نیروهای برشی عرضی V_f در آنها ایجاد می‌شود. ممان M_{t2}

حاصل این نیروها با بازوی h می‌باشد. در نتیجه

$$M_{t2} = V_f h \quad (b)$$

با استفاده از تغییر مکان جهت x، u، می‌توان عبارتی برای V_f بدست آورد. باتوجه به تقارن مقطع و کوچک بودن تغییر مکان $\varphi = \frac{h}{2} u$ بوده و در نتیجه

$$\frac{du}{dz} = \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dz} \quad (c)$$

با استفاده از تئوری خمشی تیرها، ممان خمشی M_f و نیروی برشی V_f برابر خواهند بود

$$M_f = EI_f \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^2\varphi}{dz^2} \quad (d)$$

$$V_f = -EI_f \frac{d^3u}{dz^3} = -\frac{EI_f h}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad (e)$$

که در آن I_f ، ممان اینرسی فلانچ حول محور y می‌باشد. در نتیجه رابطه (b) بصورت زیر درمی‌آید؛

$$M_{t2} = -\frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad (f)$$

با استفاده از روابط (a) و (f)، کوپل کلی برابر خواهد شد با

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} = C \frac{d\varphi}{dz} - \frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dz^3} \quad (6-20)$$

در فلانچ‌های دو انتها شرایط زیر برقرار است

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_{z=L} = 0$$

و نشان می‌دهد که در انتهای گیردار شیب صفر بوده و در انتهای آزاد ممان خمشی صفر

می‌باشد. حل رابطه (6-20) باتوجه به این شرایط بصورت زیر خواهد بود

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{C} \left[1 - \frac{\cos h\alpha (L-z)}{\cos h\alpha L} \right] \quad (g)$$

که در آن α برابر است با

(6-21)

$$\alpha = \left[\frac{2C}{EI_f h^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

برای تیری با طول بینهایت، رابطه (g) بصورت زیر درمی آید

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{C} (1 - e^{-\alpha z}) \quad (h)$$

با قراردادن رابطه (h) در روابط (a) و (f) نتایج زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} M_{t1} &= M_t (1 - e^{-\alpha z}) \\ M_{t2} &= M_t e^{-\alpha z} \end{aligned} \quad (6-22)$$

باتوجه به این رابطه دیده می شود که در انتهای گیردار ($z=0$)، $M_{t2}=M_t$ و $M_{t1}=0$ خواهد بود. بعبارت دیگر، در این انتها، کوپل پیچش کلی با نیروهای برشی عرضی که خود طبق رابطه (b) برابر

$$V_f = M_{t2}/h = M_t/h$$

می باشند، درحال تعادل است. توزیع ممان طبق رابطه (6-22) نشان می دهد که در مقاطع نزدیک انتهای گیردار مثل EF، نیروهای برشی عرضی غالب هستند، شکل (6-12). برعکس در مقاطع نزدیک انتهای آزاد مثل CD عمدتاً تنش برشی پیچشی حکمفرما می باشد. این نتیجه را می توان با قراردادن $z \approx \infty$ در رابطه (6-22) بدست آورد.

ممان خمشی در فلانچ، با استفاده از روابط (d) و (h) در $z=0$ ماگزیمم بوده و برابر است با

$$M_{f,max} = \frac{Ei_f h \alpha}{2C} M_t \quad (i)$$

ممان خمشی ماگزیمم، در انتهای گیردار فلانچ، با قراردادن رابطه (6-21) در رابطه (i) برابر خواهد شد با

$$M_{f,max} = \frac{M_t}{\alpha h} \quad (6-23)$$

با انتگرال گرفتن از رابطه (h)، و با استفاده از شرط $\varphi = 0$ در $z=0$ ، عبارت زیر برای زاویه پیچشی بدست می آید.

$$\varphi = \frac{M_t}{C} \left[z + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha z} - 1) \right] \quad (j)$$

برای تیرهای نسبتاً بلند، از $e^{-\alpha z}$ می توان صرفنظر کرد، و در نتیجه زاویه پیچشی انتهای آزاد برابر خواهد شد با

$$\varphi_{z=L} = \frac{M_t}{C} \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (6-24)$$

در این عبارت، ترم $\frac{1}{\alpha}$ اثر خمش در زاویه پیچش را نشان می دهد. چون برای پیچش خالص، زاویه پیچش کلی برابر $\varphi = M_t L / C$ است، رابطه (6-24) نشان می دهد که باگیردار کردن یک انتها، سفتی پیچشی تیر زیادتر شده است.

مثال 6-4

یک تیر کنسول با مقطع I، شکل (6-12)، تحت کوپل پیچشی 1.2KN.m قرار دارد:

a - ماگزیمم تنش طولی در تیر، و (b) زاویه پیچش کلی φ را بدست آورید.

فرض کنید: $G = 80\text{GPa}$, $E = 200\text{GPa}$

$$t_f = 10\text{mm} , t_w = 7\text{mm} , b = 0.1\text{m} , h = 0.2\text{m} , L = 2.4\text{m}$$

حل -

(a) سفتی پیچشی تیر از رابطه (6-13) برابر می شود با

$$C = \frac{M_t}{\theta} = (b_1 t_1^3 + 2b_2 t_2^3) \frac{G}{3}$$

$$= (0.19 \times 0.007 + 2 \times 0.1 \times 0.01^3) \frac{G}{3} = 8.839 \times 10^{-8} G$$

سفتی خمشی فلانچ برابر خواهد شد با

$$I_f E = \frac{0.01 \times 0.1^3}{12} E = 8.333 \times 10^{-7} E$$

با قراردادن این مقادیر در رابطه (6-21) نتیجه می شود

$$\frac{1}{\alpha} = h \sqrt{\frac{EI_f}{2C}} = h \sqrt{\frac{2.5 \times 8.333 \times 10^{-7}}{8.839 \times 10^{-8} \times 2}} = 3.43 h$$

ممان خمشی ماگزیمم در فلانچ با استفاده از رابطه (6-23) برابر می شود با

$$M_{f,max} = 3.43 M_t$$

در نتیجه ماگزیمم تنش خمشی طولی در فلانچ برابر خواهد شد با

$$u = \frac{1}{2} \int \left(\frac{M_\theta^2}{EI} + \frac{M_{t\theta}^2}{GJ} \right) ds \quad (b)$$

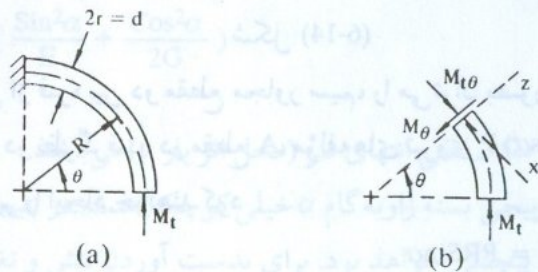
$$u = \frac{1}{2} M_t^2 R \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{EI} + \frac{\cos^2 \theta}{GJ} \right) d\theta$$

که در آن $J = 2I = \frac{\pi d^4}{32}$ است. انرژی کرنشی تمام میله با انتگرال گرفتن از این عبارت برابر خواهد شد با

$$U = \frac{8(2+\nu)R}{d^4 E} M_t^2 \quad (6-25)$$

زاویه پیچش انتهای آزاد با استفاده از رابطه $\varphi = \partial U / \partial M_t$ برابر می‌شود با

$$\varphi = \frac{16(2+\nu)R}{d^4 E} M_t \quad (6-26)$$



شکل (6-13)

فترهای ماریچی مثالی از میله‌های خمیده با مقطع دایره‌ای شکل هستند و در مثال زیر مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

$$\sigma_{t,max} = \frac{M_{t,max} x}{I_f} = \frac{3.43 M_t \times 0.05}{8.333 \times 10^{-7}} = 0.2058 \times 10^6 M_t = 246.97 \text{ MPa}$$

(b) چون $e^{-xL} = 0.03$ است، برای محاسبه φ می‌توان از رابطه (6-24) استفاده کرد. در نتیجه

$$\varphi = \frac{M_t}{C} \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1200}{8.839 \times 10^{-8} \times 80 \times 10^9} (2.4 - 3.43 \times 0.2) = 0.2908 \text{ rad}$$

اگر دو انتهای تیر آزاد باشد، زاویه پیچش کلی برابر خواهد شد با

$$\varphi = \frac{M_t L}{C} = 0.4073 \text{ rad}$$

نسبت زاویه پیچش این دو حالت برابر می‌شود با

$$\frac{\varphi_{free}}{\varphi_{fixed}} = 1.4$$

6-8 میله‌های خمیده با مقطع دایره‌ای شکل

فرض‌های قسمت (6-1)، برای میله‌های خمیده با مقطع دایره‌ای شکل، بشرط اینکه شعاع میله، r نسبت به شعاع انحنا، R کوچک باشد، معتبر هستند، برای مثال وقتی $\frac{r}{R} = \frac{1}{12}$ است ماگزیم تنش محاسبه شده از رابطه پیچش، $\tau = \frac{M_t r}{J}$ تقریباً 5% کمتر از مقدار حقیقی است. در این قسمت پیچش میله‌هائی مورد نظر است که در آن $\frac{r}{R} \ll 1$ می‌باشد.

معمولاً در میله‌های خمیده ممان خمشی و کوپل پیچش بطور همزمان عمل می‌کنند. برای محاسبه تغییر مکان این میله‌ها از روش انرژی و تئوری کاستیلیانو استفاده می‌شود. برای مثال یک میله استوانه‌ای که بصورت ربع دایره‌ای بشعاع R خمیده شده است، شکل (6-13a)، در نظر گرفته می‌شود. این میله در یک انتها گیردار و در انتهای آزاد تحت کوپل پیچش M_t قرار دارد. ممان خمشی و کوپل پیچشی در مقطع دلخواهی با زاویه θ ، شکل (6-13b)، برابر خواهند بود با

$$M_\theta = M_t \sin \theta, \quad M_{t\theta} = -M_t \cos \theta \quad (a)$$

با قراردادن این مقادیر در روابط (5-63) و (3-19) و با توجه به $dx = ds = R d\theta$ نتیجه

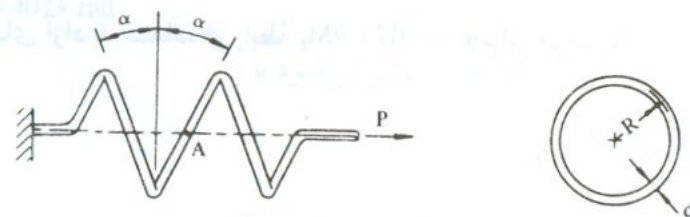
می‌شود

مثال 6-5

یک فنر مارپیچی باز⁽¹⁾ از سیمی بقطر d ، با زاویه گام α و تعداد n حلقه بشعاع R ، تحت بار P قرار دارد، شکل (6-14):

(a) عبارتی برای تنش ماگزیمم و تغییر مکان ماگزیمم بدست آورید.

(b) حالت (a) را برای فنر مارپیچی بسته⁽²⁾ انجام دهید.



شکل (6-14)

حل - المانی از فنر، بین دو مقطع مجاور سیم، را می توان بصورت تیر مستقیم تحت خمش و پیچش در نظر گرفت. در مقطع A ، مؤلفه های نیروی P ($P \sin \alpha$ ، $P \cos \alpha$) کوپل و ممان خمشی زیر را ایجاد خواهند کرد

$$M_t = PR \cos \alpha, \quad M = PR \sin \alpha \quad (c)$$

(a) تنش های اصلی در این میله برابر خواهند شد با

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

با قرار دادن

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{M_t r}{I} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

این تنش ها برابر خواهند شد با

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3} (M \pm \sqrt{M^2 + M_t^2})$$

تنش برشی ماگزیمم نیز برابر خواهد شد با

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_t^2}$$

با قراردادن M و M_t از رابطه (c)، تنش نرمال ماگزیمم برابر خواهد شد با

$$\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha) \quad (6-27a)$$

تنش برشی ماگزیمم نیز برابر می شود با؛

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad (6-27b)$$

تغییر مکان فنر با استفاده از روابط (b) و (c) و تئوری کاستیلیانو برابر خواهد شد با

$$e = \int_0^L \left(\frac{P R^2 \sin^2 \alpha}{EI} + \frac{P R^2 \cos^2 \alpha}{GJ} \right) ds$$

که در آن $L = 2\pi R n$ طول کلی سیم است. این تغییر مکان برابر می شود با

$$e = 2\pi PR^3 n \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EI} + \frac{\cos^2 \alpha}{GJ} \right)$$

یا

$$e = \frac{128PR^3 n}{d^4} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{E} + \frac{\cos^2 \alpha}{2G} \right)$$

در این رابطه e تغییر مکان افقی انتهای فنر (محل اثر بار P) می باشد.

(b) باری فنر مارپیچی بسته زاویه گام α خیلی کوچک است. در نتیجه تغییر مکان این

فنر در اثر فقط تنش پیچشی خواهد بود. برای بدست آوردن تنش و تغییر مکان این فنر

باید در روابط (6-27) و (6-28)، $\cos \alpha = 1$ و $\sin \alpha = 0$ ، قرار داده شود. در اینصورت

نتیجه می شود

$$\tau_{\max} = \sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad (6-29)$$

و

$$e = \frac{64PR^3 n}{Gd^4} \quad (6-30)$$

روابط بدست آورده در این قسمت برای هر دو حالت؛ فنر مارپیچی تحت کشش یا فشار،

صادق می باشد.